

Simulado Segunda Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 Uma das propriedades mais conhecidas sobre as funções trigonométricas são as expressões de seno e cosseno da soma de dois valores. Por exemplo, dados $a, b \in \mathbb{R}$ sabemos que

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

a) Utilizando a propriedade apresentada no enunciado verifique que

$$\cos(2x) = 2 \cos(x)^2 - 1.$$

b) Seja $\alpha = \cos(x)$, determine $\cos(3x)$ em função de α .

Questão 2 (OMU-2010) Determine de quantas formas podemos distribuir onze bolinhas iguais em três urnas distinguíveis, que denotamos por A , B e C , de modo que nenhuma urna fique vazia.

Questão 3 (OMU-2013) Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Um número é dito um **valor próprio** da matriz A se ele é raiz da equação polinomial

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0,$$

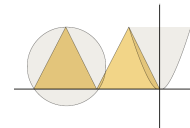
onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

Considere a matriz quadrada A de ordem 3 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a soma dos valores próprios da matriz A .

b) Determine o produto dos valores próprios da matriz A .



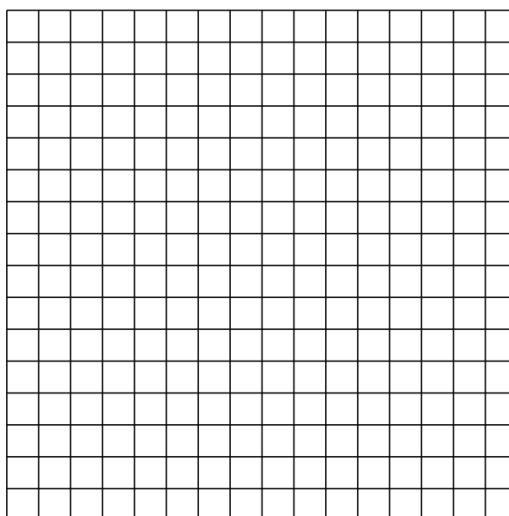
Questão 4 (OMU-2010) Sabendo que o número natural $2^{48} - 1$ possui dois divisores naturais que estão entre 60 e 70, determine esses divisores.

Questão 5 Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência que satisfaz, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$

para todo $n \geq 1$. Calcule o resto da divisão de a_{2017} por 3.

Questão 6 (OLM-2016) A malha da figura a seguir é formada por quadrados de lados iguais a 1.



- Desenhe sobre essa malha um triângulo de lados 13, 14 e 15 de modo que todos os seus vértices estejam sobre os cruzamentos da malha.
- Prove que não é possível desenhar um triângulo equilátero sobre uma malha quadriculada do mesmo modo feito no item (a).