

## Simulado da Segunda Fase - Nível Alfa

**Questão 1 (20 pontos)** Com a velocidade de 75 Km/h, um ônibus faz um certo trajeto em 40 minutos. Devido a um congestionamento, esse ônibus fez o percurso de volta em 50 minutos. Qual a velocidade média desse ônibus?

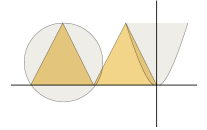
**Questão 2 (20 pontos)** Seja  $n$  um número natural. Quantos números reais  $x$  satisfazem a seguinte identidade  $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ ?

**Questão 3 (20 pontos)** Todo número natural  $n$  pode ser decomposto de maneira única em primos da seguinte forma

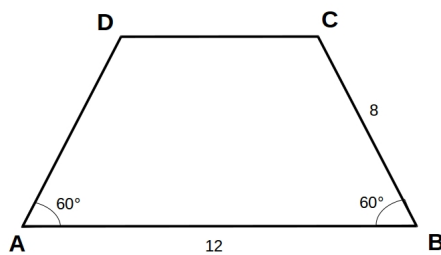
$$n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

onde  $p_1, \dots, p_k$  são primos e  $n_1, \dots, n_k$  seus respectivos expoentes. Por exemplo, a fatoração única de 2200 é  $2^3 \times 5^2 \times 11$ . Lembre que o divisor de um número natural  $n$  são todos os inteiros positivos que dividem  $n$ , por exemplo os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

- (a) O número 198 possui quantos divisores?
- (b) Se a fatoração em primos de  $n$  é  $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ , quantos divisores o número  $n$  possui? (Sua resposta deve ser dada em termos dos expoentes  $n_1, \dots, n_k$ . Teste sua resposta para  $n = 198$ ).



**Questão 4 (20 pontos)** Considere o trapézio  $ABCD$  como mostrado na figura abaixo, sendo o segmento  $AB$  a base maior e o segmento  $CD$  a base menor. A base maior  $AB$  tem comprimento 12, o segmento  $BC$  tem comprimento 8 e os ângulos  $\hat{D}AB$  e  $\hat{A}BC$  são de  $60^\circ$ . Prove que a área do trapézio  $ABCD$  é  $32\sqrt{3}$ .



**Questão 5 (20 pontos)**

(a) Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais positivos. Prove que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Esta desigualdade mostra que a média aritmética é maior que a média geométrica.

(b) Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos. Prove que

$$(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$