Simulado da Primeira Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 (10 pontos) No plano cartesiano, considere $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em $A = (0, 0)$ e raio igual a 1. O gráfico da função $f(x) = x^2$ é uma parábola que intersecta a circunferência $\mathcal{C}$ em dois pontos que chamaremos de B e C. Determine a área do triângulo ABC.

Questão 2 (10 pontos) Sejam a, b, c três números reais tais que $ab + ac + bc = 3$. Mostre que se

$$a + b + c + abc > 4$$

então um dos números a, b, c é maior do que 1 e os outros dois são menores do que 1.

Questão 3 (20 pontos) Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina a matriz $u(t)$ por

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

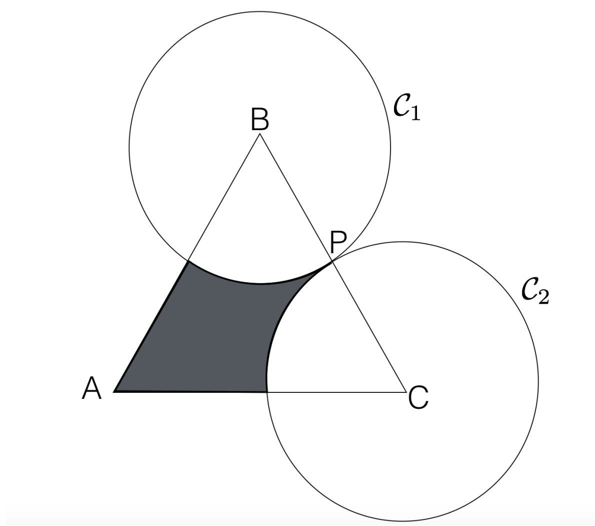
Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule $(u(1))^n$.

Questão 4 (20 pontos) Determine todas as triplas (a, b, c) de números reais que satisfazem as seguintes condições:

i) os valores a, b, c formam, nesta ordem, uma PA;

ii) os valores a, b, c formam, nesta ordem, uma PG.

Questão 5 (20 pontos) Na figura abaixo ABC é um triângulo equilátero de perímetro 3, P é o ponto médio de BC e os círculos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são círculos que passam por P e têm centros em B e C respectivamente. Calcule a área da região hachurada.



Questão 6 (20 pontos) O enunciado do Teorema do Binômio de Newton afirma que para quaisquer números reais a, b e qualquer natural positivo n temos a igualdade:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

em que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e $0! = 1$ por convenção. Utilize o Teorema do Binômio de Newton para provar que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

para todo natural $n \geq 1$.