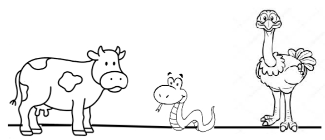
Gabarito Segunda Fase 2019 - Nível Alfa

Questão 1 (20 pontos) Maria está aprendendo a contar e ao brincar na fazenda da família ela avistou vacas, avestruzes e cobras. Ela então disse para seu pai que no total esses animais tinham 26 olhos e 38 patas. O pai de Maria saiu para ver os animais e contou um total de 11 vacas e avestruzes, ele não viu as cobras pois estavam bem escondidas.



a) Descubra para o pai de Maria quantas cobras a Maria contou.

b) Determine também o número de vacas e o número de avestruzes.

Solução:

a) Vamos denotar por c, v e a a quantidade de cobras, vacas e avestruzes respectivamente. Como todos os animais tem dois olhos obtemos que $2c+2v+2a = 26$. Como a soma de vacas e avestruzes é 11 então $v + a = 11$. Substituindo a segunda equação na primeira obtemos $2c + 2 \times 11 = 26$ Portanto, $c = 2$, ou seja, há duas cobras na fazenda.

b) Para calcular a quantidade de vacas e avestruzes vamos usar a informação sobre a quantidade de patas. Como a cobra não tem pata, o avestruz tem duas patas e a vaca tem quatro patas obtemos $4v + 2a = 38$. Usando a equação $v + a = 11$ obtemos

$$4v + 2 \times (11 - v) = 38$$

$$2v = 38 - 22$$

$$v = 8.$$

Consequentemente, $a = 11 - v = 11 - 8 = 3$. Portanto, há 8 vacas e 3 avestruzes na fazenda.

Questão 2 (20 pontos) A soma de quatro números inteiros consecutivos pode ser divisível por 4?

Solução: Não pode. Vejamos como provar.

Podemos representar a soma de quatro número como $a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$. Agora, suponha que a soma seja divisível por 4. Assim teríamos que $4a+6$ é divisível por quatro, ou seja existe um inteiro k tal que $4a + 6 = 4k$. Portanto $4(k - a) = 6$ e isso implica dizer que 6 é divisível por 4 o que não é verdade. Chegamos em um absurdo porque supomos que a soma seria divisível por 4, ou seja essa suposição está incorreta. Em outras palavras a soma de quatro números consecutivos não pode ser divisível por 4.

Questão 3 (20 pontos) João decidiu convidar alguns amigos da escola para sua casa para jogarem alguns jogos. Todos os amigos se cumprimentaram uma vez com um aperto de mão. Houve um total de 105 apertos de mão. Haviam quantas pessoas?

Solução: Vamos denotar por n a quantidade de pessoas que estavam na casa de joão para jogar os jogos, queremos determinar o valor de n. Vamos contar todos os apertos de mãos, para isso vamos considerar o seguinte: temos n pessoas na festa vamos chamá-las por $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Agora vamos contar a quantidade de apertos de mão.

A pessoa P_1 cumprimentou $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_n$ dando um total de $n-1$ apertos de mão.

A pessoa P_2 cumprimentou todo mundo também, mas como já contamos quando ela cumprimentou P_1 basta contarmos quando ela cumprimentou $P_3, P_4, \ldots, P_n$ dando um total de mais $n-2$ apertos de mão.

A pessoa P_3 cumprimentou todo mundo também, mas como já contamos quando ela cumprimentou P_1 e P_2 basta contarmos quando ela cumprimentou $P_4, P_5, \ldots, P_n$ dando um total de mais $n-3$ apertos de mão.

Continuamos esse processo para contar os cumprimentos até que temos que a pessoa $P_{(n-1)}$ já cumprimentou todas as anteriores e falta contar o último cumprimento que ela deu na pessoa Pn.

Agora o que temos que fazer é somar todos esses cumprimentos ou seja houve um total de $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1$ cumprimentos, que é o mesmo que

$$1+2+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1) \quad \text{cumprimentos.}$$

Usando a fórmula da soma de n números consecutivos sabemos que o total de cumprimentos é dado por:

$$1+2+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n)}{2}.$$

O enunciado nos diz que houveram 105 cumprimentos. Portanto

$$\frac{(n-1)(n)}{2}=105.$$

Ou seja n é uma solução para a equação segundo grau obtida da igualdade acima: $n^2-n-210=0$.

Usando a fórmula de Bhaskara temos

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 210}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{1 \pm 29}{2} = \{-14, 15\}.$$

Assim dois possíveis valores para n são -14 e 15, mas n é a quantidade de pessoas presentes na festa, portanto tem que ser um número positivo assim só resta a possibilidade de que $n = 15$.

Portanto haviam um total de 15 pessoas neste encontro.

Questão 4 (20 pontos) Ana estava brincando de números com seu irmão Pedro. Eles tinham 4 peças do número 2. Ana desafiou seu irmão a construir o maior número possível usando apenas essas 4 peças.

A mãe de Ana e Pedro já participou da OMU há muitos anos atrás e como ela adora desafios de matemática decidiu deixar o problema um pouco mais desafiador para seus filhos. Para evitar ambiguidade na escrita do número a mãe sugeriu que, além das quatro peças, eles pudessem também usar parênteses para formar os números. Por exemplo: $(2^2)^{(2^2)}$ é diferente de $2^{\left(\left(2^2\right)^2\right)}$.

a) Pedro disse que 2^{222} era o maior número possível de se formar. Ele estava certo? Explique sua resposta.

b) Liste todos os números possíveis e os ordene em ordem crescente.

a) O Pedro disse que 2^{222} era o maior número possível de se formar. Ele estava certo? Explique sua resposta.

b) Liste todas os números possíveis e os ordene em ordem crescente.

Solução:

a) O Pedro estava errado pois, por exemplo, $2^{222} < 2^{(22^2)}$ já que $22^2 = 484 > 222$.

b) Para construir todos os números possíveis vamos separar pelas possíveis bases:

Base 2222: 2222
Base 222: 222^2
Base 22^2: $(22^2)^2$
Base 22: 22^{22}, $22^{(2^2)}$
Base 2^{22}: $(2^{22})^2$
Base 2^2: $(2^2)^{22}$, $(2^2)^{(2^2)}$
Base 2: 2^{222}, $2^{(22^2)}$, $2^{((2^2)^2)}$, $2^{(2^{22})}$, $2^{(2^{(2^2)})}$.

Encontramos 13 números, sendo que $22^{(2^2)} = 22^4 = (22^2)^2$, $2^{((2^2)^2)} = 2^{2^4} = 2^{(2^{(2^2)})}$ e $(2^{22})^2 = (2^2)^{22}$. Logo temos apenas 10 números distintos.

Temos $(2^2)^{(2^2)} = 4^4 = 256 < 2222 < 222^2$, já que $222^2 > 200^2 = 40000$. Vamos analisar o número $2^{(2^{(2^2)})} = 2^{2^4} = 2^{16}$. Note que $2^{16} = (2^8)^2 = 256^2 > 222^2$. Além disso, como $2^4 = 16 < 22 < 32 = 2^5$ então $2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = (2^4)^4 < 22^{(2^2)} < (2^5)^{(2^2)} = 2^{20} < (2^2)^{22}$, ou seja,

$$(2^2)^{(2^2)} < 2222 < 222^2 < 2^{(2^{(2^2)})} < (22^2)^2 < (2^2)^{22}.$$

Como $2^2 < 22 < 32 = 2^5$ obtemos que $(2^2)^{22} < 22^{22} < (2^5)^{22} = 2^{110} < 2^{222}$, ou seja,

$$(2^2)^{22} < 22^{22} < 2^{222}.$$

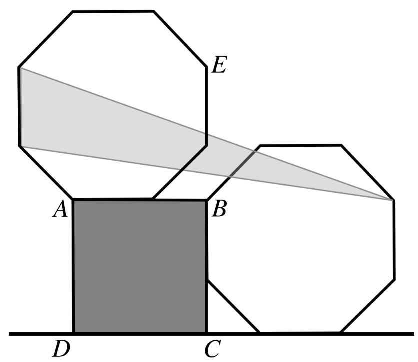
Além disso, é claro que $222 < 22^2 < (32)^2 = 2^{10} < 2^{22}$ e portanto

$$2^{222} < 2^{(22^2)} < 2^{(2^{22})}.$$

Juntando as desigualdades obtidas acima chegamos a seguinte ordenação

$$(2^2)^{(2^2)} < 2222 < 222^2 < 2^{(2^{(2^2)})} < (22^2)^2 < (2^2)^{22} < 22^{22} < 2^{222} < 2^{(22^2)} < 2^{(2^{22})}.$$

Questão 5 (20 pontos) A figura a seguir mostra dois octógonos regulares (ou seja, com todos os lados de mesma medida) idênticos, ambos com um lado intersectando um dos lados do quadrado $ABCD$ e de forma que os pontos E, B e C são colineares. Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é 1 determine a área do triângulo hachurado na figura.



Solução:

Considere F, G e H os vértices do triângulo hachurado e HJ a altura relativa ao lado FG como indicado na figura 1.

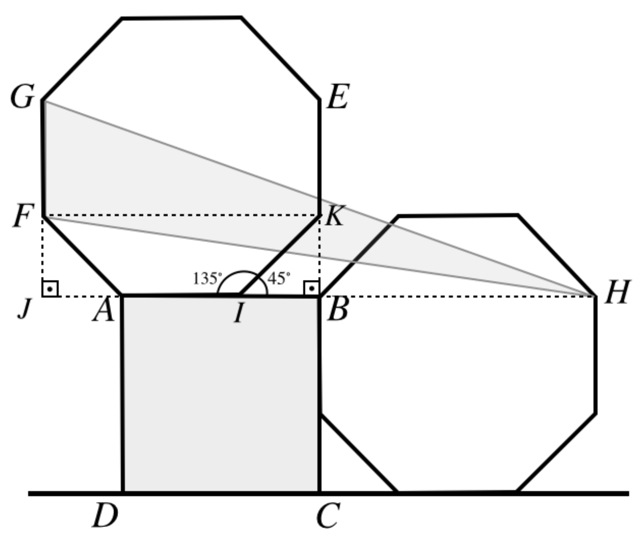


Figura 1: Vértices e outros pontos na figura

Considere também os pontos I e K como indicado na figura 1. A área de $\triangle FGH$ é dada por:

$$\text{Área}_{FGH} = \frac{\overline{HJ} \cdot \overline{FG}}{2}.$$

Primeiro vamos calcular o lado $\overline{FG}$ do octógono. Como o octógono possui todos os lados igual então basta calcular $\overline{IK}$. O triângulo $\triangle IBK$ é retângulo e o ângulo interno do octógono regular é 135°, portanto, $\angle KIB = 180 - 135 = 45°$. Assim temos:

$$\overline{IB} = \overline{BK}.$$

Portanto, seja l o lado do octógono, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\triangle IBK$ temos:

$$l^2 = \overline{IB}^2 + \overline{BK}^2 = 2 \cdot \overline{IB}^2 \Rightarrow \overline{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l.$$

Além disso, o lado do quadrado $ABCD$ tem tamanho 1 pois o quadrado possui área total 1, portanto,

$$1 = \overline{AB} = l + \overline{IB} \Rightarrow 1 = l + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot l$$

$$\Rightarrow l = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

Agora resta calcular $\overline{HJ}$. Primeiramente observe que $\triangle AJF$ é congruente ao triângulo IBK, logo $\overline{JA} = \overline{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Além disso,

$$\overline{HB} = \overline{BJ} = \overline{IB} + l + \overline{JA} = 2\overline{IB} + l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}}.$$

Finalmente,

$$\overline{HJ} = \overline{HB} + \overline{BJ} = 2 \cdot \overline{HB} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{2+\sqrt{2}}.$$

Portanto, substituindo na área de $\triangle FGH$ temos:

$$\text{Área}_{FGH} = \frac{\overline{HJ} \cdot \overline{FG}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}+4}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+4}{6+4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}-2.$$