Terceira Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Seja a um número inteiro positivo. Mostre que $a^3 - a$ é múltiplo de 6.

Questão 2 (20 pontos) Encontre todos os polinômio $p(x)$ com coeficientes reais tais que

$$(x-1)p(2x) = 4(x+1)p(x) + 5$$

para todo real $x \in \mathbb{R}$.

Questão 3 (20 pontos) Dois números m e k são sorteados ao acaso no conjunto $\{1, 2, \cdots, 111\}$.

a) Qual é a probabilidade da equação

$$x^2 + mx + k = 0$$

admitir exatamente uma raiz real.

b) Qual é a probabilidade da equação

$$x^2 + mx + k = 0$$

admitir duas raízes reais distintas.

Questão 4 (20 pontos) Considere $\mathcal{E}$ a elipse dada pela equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Sejam $A = (0, 3)$, $B = (x, y)$ e $C = (z, w)$ pontos na elipse $\mathcal{E}$ tais que o triângulo ABC é um triângulo equilátero. Calcule a área de ABC.

Questão 5 (20 pontos) Dado um par ordenado $v = (x, y)$ de números reais, definimos a *norma de* v $||v||$ como sendo o valor $\sqrt{x^2 + y^2}$ e denotamos:

$$||v|| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

a) Seja $v = (x, y)$ um ponto no plano cartesiano, mostre que a distância entre v e $(0, 0)$ é exatamente $||v||$.

b) Seja S um conjunto de 7 pontos no plano cartesiano (isto é, sete pares ordenados) de forma que para todo $v \in S$ temos

$$1 \leq ||v|| \leq 8.$$

Mostre que existem três pontos $a, b, c \in S$ de forma que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{||a||}{||b||} + \frac{||b||}{||c||} + \frac{||c||}{||a||} \leq 6.$$