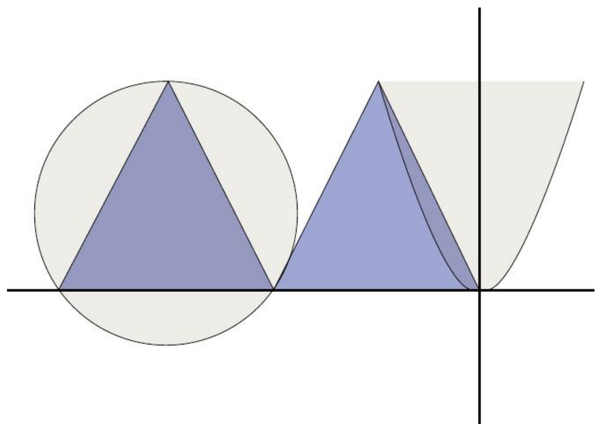
XXXIV Olimpíada de Matemática da Unicamp
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Beta

24 de junho de 2018
Duração: 4 horas



Instruções

1. É **proibido destacar** as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.
2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no CADERNO DE RESPOSTAS.
3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.
4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.
5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.
6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.
7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do CADERNO DE RESPOSTAS. É permitido levar para casa o CADERNO DE QUESTÕES.

Questão 1 (20 pontos) Em uma certa academia há três tipos diferentes de barras de ferro. Algumas delas são de 1kg, outras de 2kg e outras de 3kg. Sabe-se que no total a academia possui 47 barras de ferro e que a soma dos pesos de todas elas é de 100kg. A academia possui mais barras de 1 kg ou de 3 kg?

Questão 2 (20 pontos) Para cada tripla de números naturais (a, b, c) defina $M(a, b, c)$ como sendo o valor mínimo atingido pela função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Por exemplo, $M(1, 3, 1)$ é o valor mínimo atingido por $f(x) = x^2 + 3x + 1$ que é $M(1, 3, 1) = -\frac{5}{4}$.

a) Determine o maior valor possível para $M(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Ao escolhermos a, b e c ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule a probabilidade de obtermos a igualdade
$$M(a, b, c) = 0.$$

Questão 3 (20 pontos) Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ uma PA (progressão aritmética) de números reais. Sabendo que:

1) $a_2 = 1$;

2) os termos a_1, a_4, a_{13} formam uma PG (progressão geométrica) de razão $q \neq 1$.

Calcule a razão da PA e determine o valor do termo a_{27}.

Questão 4 (20 pontos) Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, e sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais satisfazendo
$$f(x) \cdot g(x) = c \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$
Mostre que f e g não podem ser ambas bijetoras.

Questão 5 (20 pontos) Seja $ABCD$ um quadrado cujos lados tem comprimento 8 cm e Γ a circunferência inscrita a $ABCD$. Denote por O o centro de Γ. Seja E o ponto sobre o lado AB de forma que o segmento de reta que liga A a E tenha comprimento igual a 1 cm. Seja F a interseção do segmento de reta EO com Γ, considere G a interseção da reta AF com o lado BC. Calcule o comprimento do segmento BG.