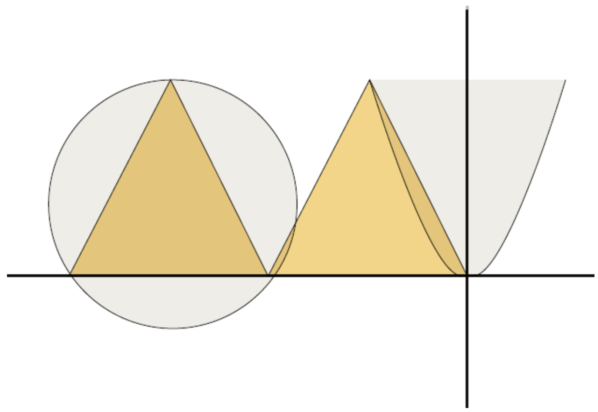
XXXIII Olimpíada de Matemática da Unicamp
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Beta

26 de agosto de 2017

Duração: 4 horas



Instruções

1. É **proibido destacar** as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.

2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no CADERNO DE RESPOSTAS.

3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.

4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.

5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.

6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.

7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do CADERNO DE RESPOSTAS. É permitido levar para casa o CADERNO DE QUESTÕES.

Questão 1 (20 pontos) Uma matriz A de tamanho $n \times n$ é dita super binária se cada linha e cada coluna de A tem exatamente um elemento igual a 1 e todos os demais elementos iguais a 0. Por exemplo, as matrizes

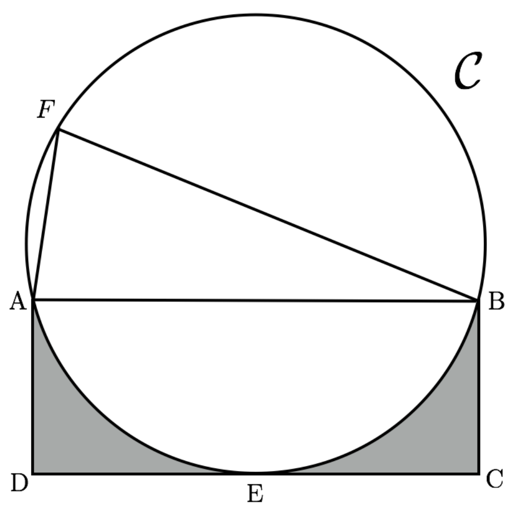
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são super binárias.

1. Quantas matrizes super binárias de tamanho 3×3 existem?
2. Existe uma matriz super binária A de tamanho 4×4 cujo determinante seja nulo?

Questão 2 (20 pontos) Seja S um conjunto de quatro números naturais. Prove que podemos tomar dois números naturais distintos $a, b \in S$ de forma que $a - b$ seja múltiplo de 3.

Questão 3 (20 pontos) Na figura a seguir $\mathcal{C}$ é uma circunferência de raio $R = 2$, AFB é um triângulo inscrito em $\mathcal{C}$ e $ABCD$ é um retângulo que intersecta a circunferência nos pontos A e B e é tangente à circunferência no ponto E. Sabendo que o ângulo $\widehat{AFB}$ é igual a 75° calcule a área da região hachurada na figura.



Questão 4 (20 pontos) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$f(1-x) + 2f(x) = 3x^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Determine os possíveis valores para $f(2017)$.

b) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x) \geq -2.$$

Questão 5 (20 pontos) Um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual do que 3 é dito palíndromo se todos os seus coeficientes são números inteiros não negativos e

$$p(x) = x^3 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{para todo real } x \neq 0.$$

Encontre todos os polinômios palíndromos tais que $p(10) = 7887$.