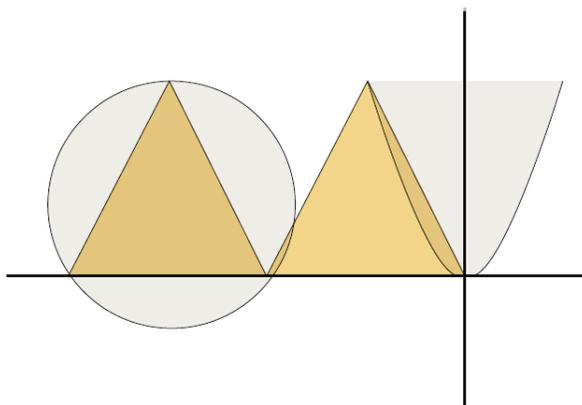


CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Alfa

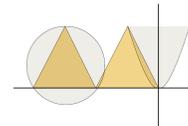
26 de agosto de 2017

Duração: 4 horas



Instruções

1. É proibido destacar as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.
2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no **CADERNO DE RESPOSTAS**.
3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.
4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.
5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.
6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.
7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do **CADERNO DE RESPOSTAS**. É permitido levar para casa o **CADERNO DE QUESTÕES**.



Questão 1 (20 pontos) Oliveira precisa de 10 mil reais e consultou os bancos A e B sobre as taxas de juros para este empréstimo. A tarifa de empréstimo do banco A é de 10% ao ano e a do Banco B é de 5% ao ano.

- (a) Oliveira fez um empréstimo de dez mil reais no Banco B. Depois de um ano qual a dívida do Oliveira no Banco B? E depois de dois anos?
- (b) Oliveira decidiu pagar a dívida depois de dois anos. Quantos reais Oliveira economizou ao escolher o Banco B ao invés do Banco A?

Questão 2 (20 pontos)

- (a) Encontre os números reais a e b para os quais a identidade abaixo seja verdadeira para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ natural

$$\frac{1}{n \times (n + 1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n + 1}$$

- (b) Simplifique a soma

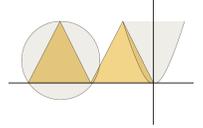
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2016 \times 2017}.$$

Questão 3 (20 pontos) Todo número natural n pode ser decomposto de maneira única em primos da seguinte forma

$$n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

onde p_1, \dots, p_k são primos e n_1, \dots, n_k seus respectivos expoentes. Por exemplo, a fatoração única de 2200 é $2^3 \times 5^2 \times 11$. Além disso, os divisores de um número natural n são todos os inteiros positivos que dividem n , por exemplo os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

- (a) Se a fatoração em primos de n é $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, quantos divisores o número n possui?
- (b) Prove que os quadrados perfeitos são os únicos números que possuem uma quantidade ímpar de divisores.



Questão 4 (20 pontos) Aninha tem um jogo que a ajuda treinar as operações de soma e subtração. Na primeira rodada Aninha escolhe entre $+1$ ou -1 , na segunda rodada Aninha escolhe entre $+2$ ou -2 e assim por diante. Ou seja, na n -ésima rodada Aninha escolhe entre $+n$ ou $-n$. Aninha pode escolher parar em qualquer rodada e ao parar é calculada a soma de todos os números escolhidos até a rodada n .

Por exemplo, suponha que Aninha na primeira rodada escolha -1 , na segunda rodada $+2$ e decida parar, então o resultado do jogo é $-1 + 2 = 1$. Os resultados do jogo ao parar na segunda rodada só podem ser $1 + 2 = 3$, $1 - 2 = -1$, $-1 + 2 = 1$, $-1 - 2 = -3$. O número 1 não pode ser resultado de jogo que pára na terceira rodada, de fato os únicos resultados possíveis para a terceira rodada são -6 , -4 , -2 , 0 , 2 , 4 e 6 .

Suponha abaixo que Aninha tenha parado na n -ésima rodada.

- O número $\frac{n(n+1)}{2}$ pode ser um dos possíveis resultados do jogo?
- Mostre que se n é múltiplo de 4, então 0 é um dos possíveis resultados do jogo.
- Se o natural n é da forma $4k + 3$, então 0 é um dos possíveis resultados do jogo?

Questão 5 (20 pontos)

Uma folha retangular é dobrada como mostrada na figura abaixo e tal que um dos cantos da folha toque o lado inferior DF no seu ponto médio E . Os triângulos ABC e EDC são congruentes. Se o tamanho do lado menor, DF , da folha da folha é 8, então qual o tamanho do lado maior?

