Primeira Fase 2018 - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Um retângulo de base A cm e altura B cm (onde A e B são números reais positivos) tem sua altura aumentada A% e sua base aumentada B%. Determine a razão da área do maior retângulo pela área do menor.

Questão 2 (20 pontos)

a) Seja $f(x)$ uma função quadrática da forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ para certos reais a, b, c com $a > 0$. Sejam x_1, x_3 as raízes de $f(x)$ e seja x_2 o ponto onde f atinge seu mínimo, mostre que x_1, x_2, x_3 é uma PA, ou seja, prove que $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

b) Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais formando uma PA, mostre que existe pelo menos uma função quadrática $f(x)$ tal que $f(x_1) = f(x_3) = 0$ e tal que f atinge seu mínimo em x_2.

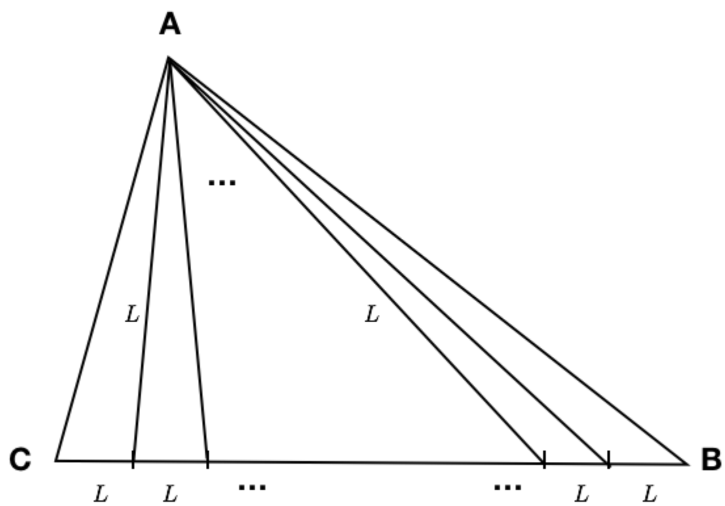
Questão 3 (20 pontos) Dados dois inteiros positivos $a < b$ definimos a *função delta* do par (a, b), denotada por $\Delta(a, b)$, como sendo o menor inteiro não negativo k tal que $a + k$ não divide $b + k$. Por exemplo:

- a função delta entre 3 e 4 é zero, isto é, $\Delta(3, 4) = 0$, pois: $3 + 0 = 3$ não divide $4 + 0 = 4$;
- a função delta entre 2 e 8 é igual a dois, isto é, $\Delta(2, 8) = 2$, pois:
  - $2 + 0 = 2$ divide $8 + 0$;
  - $2 + 1 = 3$ divide $8 + 1 = 9$ mas
  - $2 + 2 = 4$ não divide $8 + 2 = 10$.

a) Calcule $\Delta(1, 25)$.

b) Prove que $\Delta(1\ ,\ n! + 1) \geq n$.

Questão 4 (20 pontos) Um triângulo ABC é dito n-*legal* se ao particionarmos o lado BC em n pedaços de mesmo tamanho $L = \frac{BC}{n}$, os segmentos que ligam A aos pontos da divisão em BC também tem tamanho L.



a) Prove que um triângulo 2-legal é um triângulo retângulo.

b) Seja ABC um triângulo trilegal, ou seja um triângulo 3-legal, determine os ângulos internos de ABC.

c) Mostre que não existe nenhum triângulo n-legal se $n \geq 4$.

Questão 5 (20 pontos)

a) Sejam x e y dois números reais tais que $x^2 + y^2 = 1$. Prove que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen} \alpha = x \quad \text{e} \quad \cos \alpha = y.$$

b) Determine o maior valor possível para a expressão

$$\sqrt{ab} \cdot (a - b)$$

onde a e b são números reais não negativos satisfazendo $a + b = 1$.