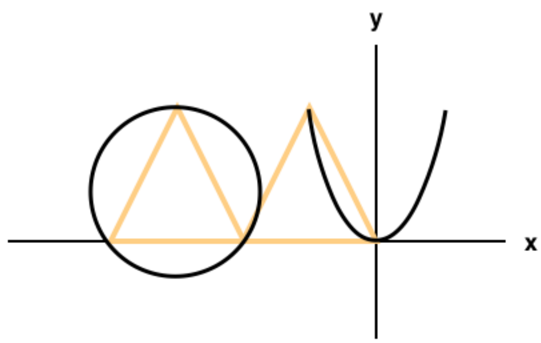
Primeira Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 (10 pontos) O logo da OMU é formado por uma cincunferência, dois triângulos equiláteros congruentes e uma parábola como mostra a figura abaixo. Sabendo que a circunferência está circunscrita a um dos triângulos e que a parábola é descrita pela função $f(x) = x^2$ e passa por dois vértices do triângulo que possui um vértice em $(0, 0)$, calcule o comprimento da circunferência.



Questão 2 (10 pontos)

a) Prove que, para quaisquer números reais positivos a e b, temos

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

com igualdade se, e somente se, $a = b$.

b) Determine o maior valor possível para a expressão

$$\sqrt{2(z-y)\sqrt{xy}}$$

onde x, y, z são números reais positivos satisfazendo $z > y$ e $x + z = 2017$.

Questão 3 (20 pontos) Dado a seguinte matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule as matrizes A^2 e A^3.

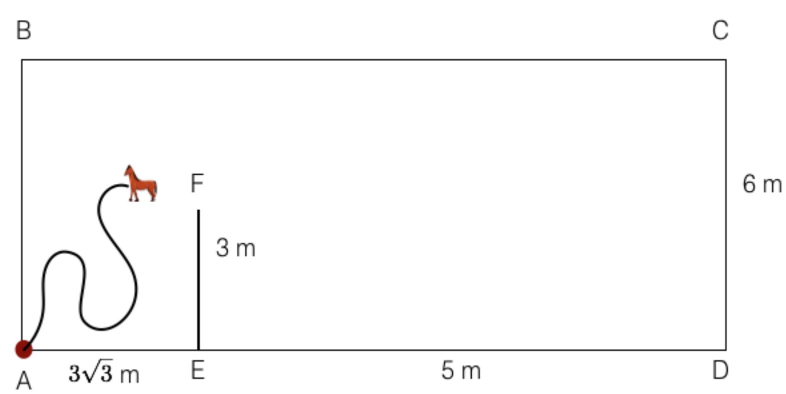
b) Determine A^n, para todo natural $n \geq 2$.

Questão 4 (20 pontos) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma PA com $a_1 = 7$ e razão r. Calcule

$$\sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}}$$

em função de r.

Questão 5 (20 pontos) Hélio possui um jardim retangular $ABCD$, representado na figura abaixo, onde deseja plantar frutas. No ponto A está localizada uma estaca na qual Hélio amarra seu cavalo com uma corda de comprimento $6\sqrt{2}$ metros. No jardim há também um muro, representado pelo segmento EF, de três metros de comprimento. Ignorando o tamanho do cavalo, determine o máximo da área que Hélio poderá utilizar para plantar as frutas de forma que o cavalo não consiga comê-las.



Questão 6 (20 pontos) Mostre que, para todo número inteiro $n \geq 2$, temos

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt{\frac{2}{n}} + 1.$$