Simulado Segunda Fase 2018 - Nível Beta
Gabarito

Questão 1 (OMU-2014) Determine quantos são os números inteiros, compreendidos entre 100 e 500, que divididos por 13 têm resto 11. Determine também a soma desses números inteiros.

Solução: Os números inteiros que estamos procurando podem ser escritos da seguinte forma

$$m = 13k + 11 \text{ para } k = 7, 8, \ldots, 37.$$

Assim, teremos 31 números inteiros entre 100 e 500 satisfazendo a condição dada no problema, que são:

$$m_1 = 102,\ m_2 = 115,\ m_3 = 128, \ldots,\ m_{31} = 492.$$

Desse modo, temos uma PA cujo primeiro termo é 102 e razão 13. Portanto, a soma desses 31 números inteiros, que estão numa PA, é dada por:

$$S = \frac{102 + 492}{2} \times 31 = 9207.$$

Questão 2 (OMU-2017) Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule as matrizes A^2 e A^3.

b) Determine A^n, para todo natural $n \geq 2$.

Solução:

a) Fazendo a multiplicação de matrizes temos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Baseado nos resultados obtidos na alternativa (a) afirmamos que, para todo $n \geq 1$ temos

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

De fato para $n = 1$ a afirmação é verdadeira. Suponha que seja verdadeira para um certo $n \geq 1$ e vamos provar que é verdadeira para $n + 1$. Como $A^{n+1} = A^n \cdot A$, pela hipótese de indução temos,

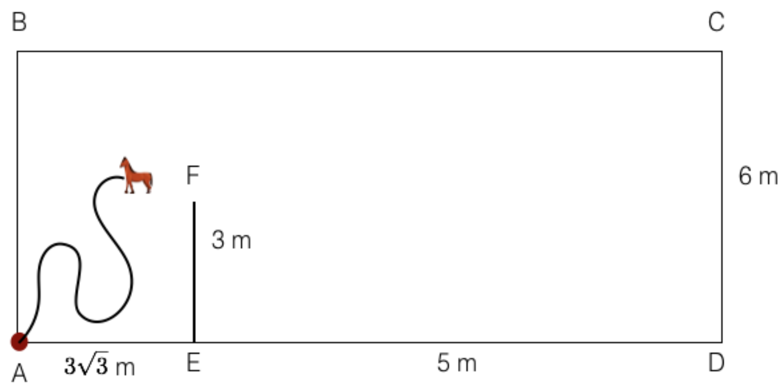
$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

o que prova que a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Assim, por indução finita concluímos que a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$, ou seja,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Questão 3 (OMU-2017) Hélio possui um jardim retangular $ABCD$, representado na figura abaixo, onde deseja plantar frutas. No ponto A está localizada uma estaca na qual Hélio amarra seu cavalo com uma corda de comprimento $6\sqrt{2}$ metros. No jardim há também um muro, representado pelo segmento EF, de três metros de comprimento. Ignorando o tamanho do cavalo, determine o máximo da área que Hélio poderá utilizar para plantar as frutas de forma que o cavalo não consiga comê-las.



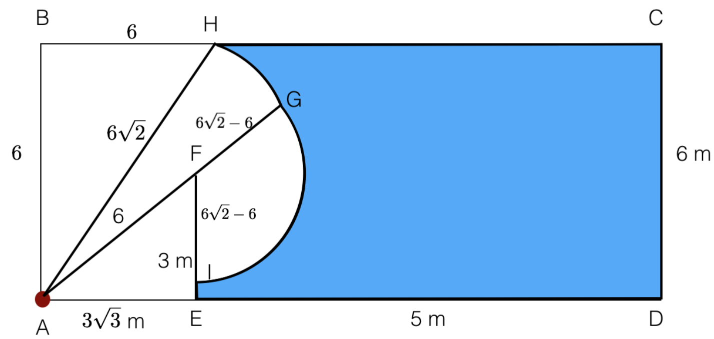
Solução: Ao longo da solução todas as medidas serão em metros. Para simplificar a escrita omitiremos a notação de metros durante a solução.

Denote por G o ponto extremo da corda quando ela toca o ponto F da parede EF e H o ponto em que a corda toca o lado BC quando estendida (veja a figura abaixo), em particular $AH = AG = 6\sqrt{2}$ que é o comprimento da corda. Pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{BH}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AH}^2$. Substituindo os valores $\overline{AB} = 6$ e $\overline{AH} = 6\sqrt{2}$ obtemos $\overline{BH} = 6$. Assim, o triângulo ABH é isósceles e $H\hat{A}B = B\hat{H}A = 45°$. Observe também que, por pitágoras, $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 \Rightarrow 27 + 9 = \overline{AF}^2 \Rightarrow \overline{AF} = 6$. Logo $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6\sqrt{2} - 6$. Vamos provar que $\overline{FG} < 3$. Temos as seguintes equivalências:

$$\overline{FG} = 6(\sqrt{2} - 1) < 3 \Longleftrightarrow 6\sqrt{2} < 9 \Longleftrightarrow \sqrt{2} < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 2 < \frac{9}{4} \Longleftrightarrow 8 < 9.$$

Como a última desigualdade é verdadeira concluímos que $\overline{FG} < 3$.

A partir do ponto H o cavalo poderá pastar dentro de um setor circular de raio $6\sqrt{2}$ e ângulo $H\hat{A}G$, conforme mostra a figura abaixo, até que a corda toque o ponto F e depois, a partir de G, o cavalo poderá passar dentro de um setor circular de raio $\overline{FG} = 6\sqrt{2}$ e ângulo $G\hat{F}E$ (observe que aqui usamos o fato de que $\overline{FG} < 3$ pois, caso contrário, a corda tocaria o lado ED e não o lado EF). Veja a figura abaixo:



Vamos então calcular a área de cada uma das regiões demarcadas acima.

Área do triângulo ABC: Chame esta área de A_1. Então

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BH}}{2} = 18.$$

Área do triângulo AEF: Chame de A_2 esta área. Então

$$A_2 = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Área da região circular AHG: Chame A_3 esta área. Como já sabemos que $\overline{AH} = \overline{AG} = 6\sqrt{2}$, para obtermos A_3 precisamos calcular o ângulo $H\hat{A}G$. Chame $\alpha = F\hat{A}E$. Então

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo $\alpha = 30°$. Agora temos

$$H\hat{A}G = 90° - H\hat{A}B - F\hat{A}E = 90° - 45° - 30° = 15°.$$

Então a área da região circular AHG é dada por

$$A_3 = \frac{15}{360}\pi\overline{AH}^2 = \frac{1}{24}\pi(6\sqrt{2})^2 = 3\pi.$$

Área da região circular EFG: Similar ao caso anterior, já sabemos que o raio dessa região circular é $\overline{FG} = 6\sqrt{2} - 6$, então precisamos calcular o ângulo $G\hat{F}E$ para obter a área A_4 da região circular EFG. Como $E\hat{A}F = 30°$ então $A\hat{F}E = 60°$. Logo $G\hat{F}E = 180° - 60° = 120°$. Assim

$$A_4 = \frac{120}{360}\pi\overline{FG}^2 = \frac{1}{3}\pi(6\sqrt{2} - 6)^2 = 12\pi(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Finalmente, para calcular a área que Hélio pode usar para plantar as frutas devemos calcular a área do retângulo $ABCD$ e subtrair as áreas A_1, A_2, A_3 e A_4 calculadas acima. Logo, a área que Hélio poderá utilizar é:

$$\overline{ADCD} - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = 6(3\sqrt{3} + 5) - 18 - \frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\pi - 12\pi(\sqrt{2} - 1)^2 =$$

$$= 12 + \frac{25}{2}\sqrt{3} + 3\pi(11 - 8\sqrt{2}).$$

Logo, a área que Hélio poderá utilizar para plantar é de $12 + \frac{25}{2}\sqrt{3} + 3\pi(11 - 8\sqrt{2})$ metros quadrados.

Questão 4 Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que $p(x)$ satisfaz

$$2 \cdot p(x^2) = p(x^2+1) + (x^2+1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, determine $p(x)$ e calcule $p(2018)$.

Solução: Primeiramente vamos determinar o grau de $p(x)$ olhando qual é o coeficiente líder em cada lado da equação do enunciado.

Seja n o grau de $p(x)$ e $a_n \neq 0$ o coeficiente líder de $p(x)$, ou seja, a_n é o coeficiente acompanhando x^n em $p(x)$. Então o coeficiente líder de $2 \cdot p(x^2)$ é $2a_n$.

Por outro lado, observe que o coeficiente líder de $p(x^2+1)$ é igual a a_n. Assim, se $n \geq 3$ então o coeficiente líder de $p(x^2+1) + (x^2+1)$ será a_n. Portanto, se $n \geq 3$ temos

$$2a_n = a_n \Rightarrow a_n = 0,$$

caindo em contradição. Concluímos então que $n \leq 2$, ou seja, $p(x)$ tem no máximo grau 2. Consideremos então

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

A condição do enunciado nos dá

$$2(ax^4 + bx^2 + c) = a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) + c + (x^2+1)$$

$$\Rightarrow 2ax^4 + 2bx^2 + 2c = ax^4 + (2a+b+1)x^2 + (a+b+c+1)$$

$$\Rightarrow 2a = a, \quad 2b = 2a+b+1. \quad 2c = a+b+c+1.$$

A primeira equação nos dá $a = 0$. Agora, substituindo na segunda obtemos

$$2b = b+1 \Rightarrow b = 1.$$

Finalmente substituindo na terceira temos

$$2c = 1 + c + 1 \Rightarrow c = 2.$$

Assim concluímos que o polinômio $p(x)$ é dado por

$$p(x) = x + 2.$$

Em particular $p(2018) = 2020$.

Questão 5 (OMU-2016) A equação $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ possui 5 soluções complexas distintas, todas de módulo igual a 1.

a) Encontre estas soluções.

b) Represente estas soluções no plano complexo.

c) Encontre o polígono regular com o menor número de lados que tem pelo menos estes pontos como vértices e calcule sua área.

Solução:

(a) Vamos usar a seguinte propriedade:

Seja $z \neq 1$. É fácil verificar que $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \ldots + z^{n-1})$ para todo natural n. No caso particular, temos que $z^6 - 1 = (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. Logo, as soluções de $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ são as raízes sextas da unidade (por definição, soluções de $z^6 - 1 = 0$), exceto a raiz $z = 1$.

Considerando a representação $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, como $r = 1$, devemos ter $\theta = \frac{2k\pi}{6}$, com $k = 01, 2, 3, 4, 5$ e obtemos que as raízes sextas da unidade são:

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, z_4 = -1, z_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, z_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as 5 soluções complexas distintas da equação são:

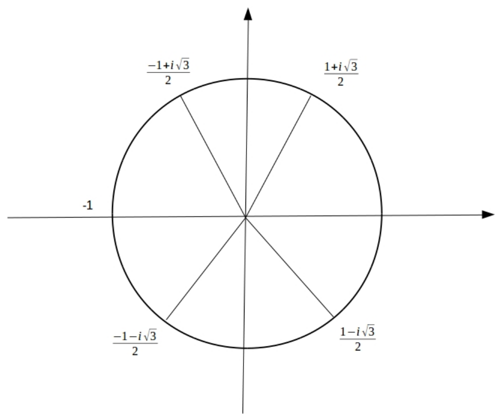
$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Solução alternativa:</u> Considerando que

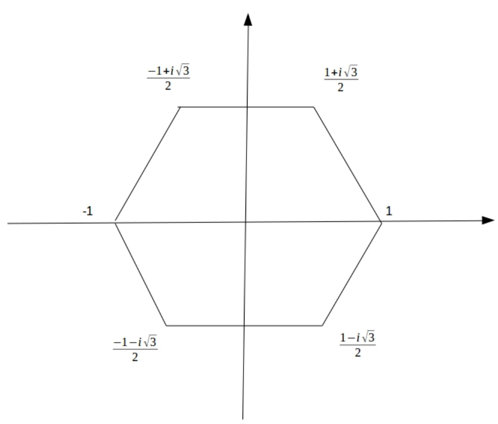
$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^3(z^2 + z + 1) + (z^2 + z + 1) = (z^3 + 1)(z^2 + z + 1),$$

encontra-se as três soluções de $(z^3 + 1) = 0$ (que são $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -1$ e $z_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$) e as duas soluções de $z^2 + z + 1 = 0$ (que são $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $z_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$).

(b) Representação das soluções no plano complexo:



(c) Observe que as soluções encontradas não formam um polígono regular, mas correspondem a 5 dos seis vértices de um hexágono regular, com vértices: $1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Observe que o vértice 1 é raiz de z^6-1, a única raíz que não é solução de $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.



A área será 6 vezes a área do triângulo de vértices $1, 0, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Note que este triângulo é equilátero e seus lados tem comprimento 1. Logo a área do triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e, consequentemente, a área do hexágono é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.