# Gabarito do Simulado da Segunda Fase - Nível Alfa

**Questão 1 (20 pontos)** Com a velocidade de 75 Km/h, um ônibus faz um certo trajeto em 40 minutos. Devido a um congestionamento, esse ônibus fez o percurso de volta em 50 minutos. Qual a velocidade média desse ônibus?

**Solução:** Primiero vamos calcular a distância $x$, em Km, que o ônibus percorreu no percurso de ida. Como a velocidade foi de 75 Km/h e o trajeto foi percorrido em 40 minutos então temos que

$$\begin{array}{rcl} 75 \text{ km} & \longrightarrow & 60 \text{ min} \\ x \text{ km} & \longrightarrow & 40 \text{ min} \end{array}$$

Com isso, temos que $x = \frac{75\times 40}{60}$, ou seja, $x = 50$ Km. Na volta o ônibus percorreu trajeto de 50 Km em 50 minutos. A velocidade média em Km/h é calculada dividindo a distância total percorrida em Km pelo tempo gasto em horas. Portanto, para calcular a velocidade média primeiro precisamos converter 50 minutos em horas,

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ hora} & \longrightarrow & 60 \text{ min} \\ y \text{ hora} & \longrightarrow & 50 \text{ min} \end{array}$$

logo $y = \frac{50}{60}$, ou seja, o tempo gasto foi $\frac{5}{6}$ horas ou 50 minutos. Portanto, a velocidade média em Km/h é $\dfrac{50}{\frac{5}{6}} = 60$.

**Questão 2 (20 pontos)** Seja $n$ um número natural. Quantos números reais $x$ satisfazem a seguinte identidade $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$?

**Solução:** Note que

$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \Longleftrightarrow x^n x^2 = x^n x + x^n \Longleftrightarrow x^n x^2 = x^n(x+1)$$

Logo, $x = 0$ é uma solução da equação. Para encontrar as outras soluções vamos supor que $x \neq 0$ e dividir a igualdade por $x^n$, obtendo assim

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Por Bhaskara temos que as soluções da equação acima são dadas por

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto a solução do problema é que para cada $n$ natural existem três números que satisfazem a identidade, $x = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

**Questão 3 (20 pontos)** Todo número natural $n$ pode ser decomposto de maneira única em primos da seguinte forma

$$n = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

onde $p_1, \dots, p_k$ são primos e $n_1, \dots, n_k$ seus respectivos expoentes. Por exemplo, a fatoração única de 2200 é $2^3 \times 5^2 \times 11$. Lembre que o divisor de um número natural $n$ são todos os inteiros positivos que dividem $n$, por exemplo os divisores de 12 são $1, 2, 3, 4, 6$ e $12$.

(a) O número 198 possui quantos divisores?

(b) Se a fatoração em primos de $n$ é $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, quantos divisores o número $n$ possui? (Sua resposta deve ser dada em termos dos expoentes $n_1, \dots, n_k$. Teste sua resposta para $n = 198$).

**Solução:**

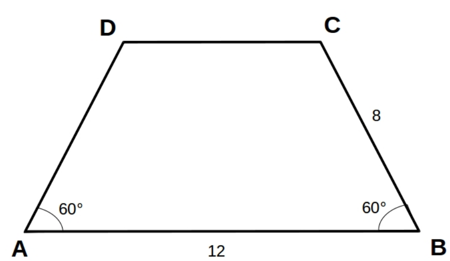
(a) Note que $198 = 2 \times 3^2 \times 11$. Olhando para a decomposição em primos podemos listar todos seus dividores:

$$1, 2, 3, 11, 2 \times 3, 2 \times 11, 3 \times 11, 3^2, 2 \times 3 \times 11, 2 \times 3^2, 3^2 \times 11, 2 \times 3^2 \times 11.$$

(b) Pelo cálculo anterior podemos ver que os divisores do número $n$ são todas as possíveis combinações de multiplicações que podemos fazer utilizando os primos que compoem a sua fatoração, em outras palavras os divisores podem ser escritos como $p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times \ldots \times p_k^{l_k}$ onde cada $l_i$ varia entre 0 (caso em que o primo não aparece) e $n_i$ (potência máxima do primo na fatoração). Assim para cada primo $p_i$ temos $(n_i + 1)$ escolhas e portanto, pelo princípio multiplicativo, temos que a quantidade de divisores é dada por $(n_1 + 1) \times (n_1 + 1) \times \ldots (n_k + 1)$.

Assim podemos aplicar esta regra para checar a resposta do item (a). Como $198 = 2 \times 3^2 \times 11$, então a quantidade de primos de 198 é $(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 12$.

**Questão 4 (20 pontos)** Considere o trapézio $ABCD$ como mostrado na figura abaixo, sendo o segmento $AB$ a base maior e o segmento $CD$ a base menor. A base maior $AB$ tem comprimento 12, o segmento $BC$ tem comprimento 8 e os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são de 60°. Prove que a área do trapézio $ABCD$ é $32\sqrt{3}$.

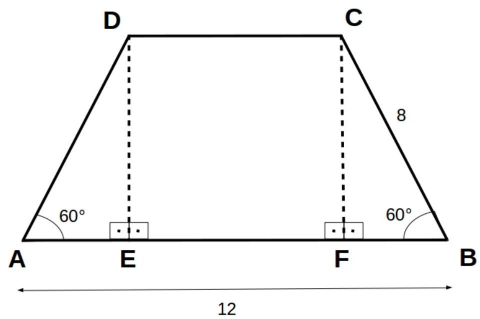



**Solução:** A área do trapézio é a metade do produto da soma das bases pela altura. Trace as alturas do trapézio e denote por $E$ e $F$ os pontos de intersecção das alturas com o segmento $AB$ (veja a figura abaixo).

Para calcular a área do trapézio basta encontrar o tamanho dos segmentos $CD$ e $CF$. Para isso, considere o triângulo retângulo $BFC$. Temos que

$$\frac{\overline{CF}}{8} = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{CF} = 4\sqrt{3},$$

$$\frac{\overline{FB}}{8} = \cos(60°) = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{FB} = 4.$$




Observe que os triângulos $BFC$ e $AED$ são congruentes pela caso $LAA$. Portanto, $\overline{AE} = \overline{FB} = 4$. Além disso, $\overline{DC} = \overline{EF} = 12 - 4 - 4 = 4$.

Portanto, a área do trapézio é dada por

$$\frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \times \overline{CF}}{2} = \frac{(12+4) \times 4\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}.$$

**Questão 5 (20 pontos)**

(a) Sejam $x$ e $y$ dois números reais positivos. Prove que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Esta desigualdade mostra que a média aritmética é maior que a média geométria.

(b) Sejam $a$ e $b$ dois números reais positivos. Prove que

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

**Solução:**

(a) Note que

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad &\iff \quad (x+y) \geq 2\sqrt{xy} \iff (x+y)^2 \geq (2\sqrt{xy})^2 \iff \\ x^2+2xy+y^2 \geq 4xy \quad &\iff \quad x^2-2xy+y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como a última desigualdade é verdadeira, temos o resultado.

(b) Temos que $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1$. Assim a desigualdade é equivalente a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Vamos aplicar a desigualdade do item (a) para checar esta última desigualdade:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{b}{a}} = 2.$$