Gabarito Simulado da Primeira Fase 2017- Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) No plano cartesiano, considere $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em $A = (0,0)$ e raio igual a 1. O gráfico da função $f(x) = x^2$ é uma parábola que intersecta a circunferência $\mathcal{C}$ em dois pontos que chamaremos de B e C. Determine a área do triângulo ABC.

Solução: Considere $B = (x, y)$. Como B é um ponto no gráfico da função $f(x)$ então $y = f(x)$. Como B está na circunferência de raio 1 e centro A, então $AB = 1$. Por outro lado o teorema de Pitágoras nos diz que:

$$(AB)^2 = x^2 + (f(x))^2 \Rightarrow (AB)^2 = x^2 + x^4 \Rightarrow$$

$$x^4 + x^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Ou seja

$$x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Obs: As raízes reais da equação (1) *também podem ser obtidas fazendo a substituição* $y = x^2$, *resolvendo a equação* $y^2 + y - 1 = 0$ *e extraindo a raiz quadrada da solução positiva desta equação.*

Por um raciocínio análogo $C = (x', (x')^2)$ com $x' = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Assim, o triângulo ABC é o triângulo com vértices

$$(0,0), \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Observe que a base BC tem tamanho $2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ e a altura relativa a esta base é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Logo a área do triângulo é:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3/2}.$$

Questão 2 (20 pontos) Sejam a, b, c três números reais tais que $ab + ac + bc = 3$. Mostre que se

$$a + b + c + abc > 4$$

então um dos números a, b, c é maior do que 1 e os outros dois são menores do que 1.

Solução: Observe que:

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= (ab - a - b + 1)(c - 1) \\ &= abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1 \\ &= abc + a + b + c - 1 - (ab + bc + ac) > 4 - 1 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Como $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$ então ou os três termos do produto são positivos ou um deles é positivo e os outros dois negativos. Ou seja, ou a, b e c são todos maiores do que 1 ou exatamente um deles é maior do que 1 e os outros dois menores do que 1.

Observe que se a, b e c são todos maiores que 1 então $ab + ac + bc > 3$ contradizendo uma das hipóteses. Logo concluímos que exatamente um deles é maior que 1 como queríamos demonstrar.

Questão 3 (20 pontos) Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina a matriz $u(t)$ por

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule $(u(1))^n$.

Solução: Observemos que $u(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e que $u(1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vamos provar por indução finita que $(u(1))^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De fato, para $n = 1$ e $n = 2$ já vimos que esta afirmação é verdadeira. Suponha por hipótese que tal afirmação seja verdadeira para um certo n e vamos provar que é verdadeira para $n+1$. Como $(u(1))^{n+1} = u(1) \cdot (u(1))^n$ temos por hipótese de indução que

$$u(1)^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot n + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot n + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim $u(1)^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, por indução finita, concluímos o que queríamos demonstrar.

Questão 4 (20 pontos) Determine todas as triplas (a, b, c) de números reais que satisfazem as seguintes condições:

i) os valores a, b, c formam, nesta ordem, uma PA;

ii) os valores a, b, c formam, nesta ordem, uma PG.

Solução: Seja r a razão da PA (a, b, c), temos $b = a + r$ e $c = a + 2r$. Seja q a razão da PG (a, b, c) temos $b = qa$ e $c = q^2a$. Assim

$$qa = a + r \Rightarrow a(q - 1) = r \tag{2}$$

$$q^2a = a + 2r \Rightarrow a(q^2 - 1) = 2r \Rightarrow a(q - 1)(q + 1) = 2r \tag{3}$$

Substituindo o valor de r obtido na equação (2) na segunda equação obtemos:

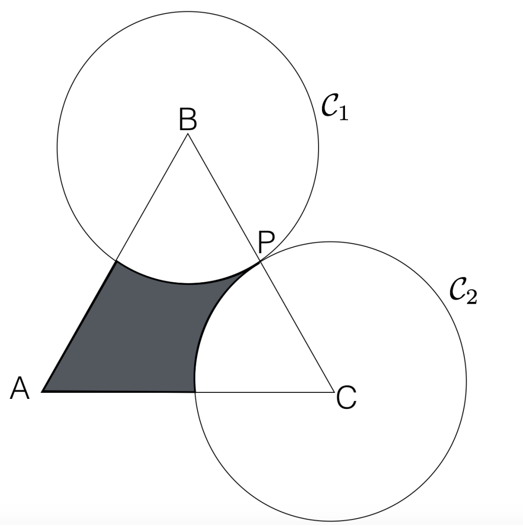
$$a(q - 1)(q + 1) = 2r \Rightarrow a(q - 1)(q + 1) = 2a(q - 1) \tag{4}$$

Logo, de (4) temos que $a = 0$ ou $q - 1 = 0$ ou $q + 1 = 2$. Assim (4) implica $a = 0$ ou $q = 1$.

- Se $a = 0$ então de (2) segue que $r = 0$ portanto $b = a + r = 0$ e $c = a + 2r = 0$. Assim $a = b = c$.
- Se $q = 1$ então de (2) segue que $r = 0$ e, portanto, $b = a + r = a$, $c = a + 2r = a$. Logo $a = b = c$.

Ou seja, em todos os casos obtemos $a = b = c$ concluindo o que queríamos demonstrar. $\square$

Questão 5 (20 pontos) Na figura abaixo ABC é um triângulo equilátero de perímetro 3, P é o ponto médio de BC e os círculos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são círculos que passam por P e têm centros em B e C respectivamente. Calcule a área da região hachurada.



Solução: Denotemos por A_1 a área da região dada pela interseção do interior da circunferência $\mathcal{C}_1$ com o interior do triângulo ABC e A_2 a área da região dada pela interseção do interior da circunferência $\mathcal{C}_2$ com o interior do triângulo ABC. Note que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ tem comprimento 1, logo os raio das circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são iguais a $1/2$. Como o triângulo ABC é equilátero todos os seus ângulos internos medem 60 graus e, portanto, as áreas $A_1 = A_2$ correspondem a $\frac{1}{6}$ da área das circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Assim,

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{6}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}\pi.$$

Por outro lado, a área total do triângulo ABC é

$$A_{ABC} = \frac{bh}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}/2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Consequentemente a área da região hachurada é dada por

$$A_{ABC} - A_1 - A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{1}{24}\pi = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

Questão 6 (20 pontos) O enunciado do Teorema do Binômio de Newton afirma que para quaisquer números reais a, b e qualquer natural positivo n temos a igualdade:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

em que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

e $0! = 1$ por convenção. Utilize o Teorema do Binômio de Newton para provar que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

para todo natural $n \geq 1$.

Solução : Seja $n \geq 1$ qualquer, pelo Teorema do Binômio de Newton temos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Então temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Como $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$ temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k. \tag{5}$$

Observe que todos os termos que aparecem na expressão

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

são não negativos. Assim de (5) obtemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \geq 2,$$

como queríamos demonstrar. $\square$