Simulado da Primeira Fase - Nível Alfa

Questão 1 (20 pontos) Encontre os três inteiros consecutivos cuja soma é 186.

Solução: Seja x o primeiro número, logo como os três números são consecutivos, então os outros dois números são $x+1$ e $x+2$. Agora calculando a respectiva soma, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
x + (x+1) + (x+2) &= 186 \\
x + x + x + 1 + 2 &= 186 \\
3x + 3 &= 186 \\
3x &= 186 - 3 \\
3x &= 183 \\
x &= \frac{183}{3} \\
x &= 61.
\end{aligned}
$$

Por tanto, os números procurados são $61, 62$ e 63.

Questão 2 (20 pontos) Em um sítio vivem 24 animais entre gatos e cachorros. Sabe-se que 25% dos animais são gatos.

a) Quantos cachorros vivem no sítio?

b) A dona do sítio quer adotar mais cachorros, porém ela quer sempre ter um mínimo de 20% de gatos no total. Qual a quantidade máxima de cachorros que podem ser levados para viver no sítio?

Solução:

a) A quantidade de gatos é 25% de 24, ou seja, $24 \times \frac{25}{100} = 24 \times \frac{1}{4} = 6$. A quantidade de cachorros no sítio é igual ao número total de animais menos o número de gatos, ou seja, $24 - 6 = 18$. Logo, o número de cachorros que vivem no sítio é 18.

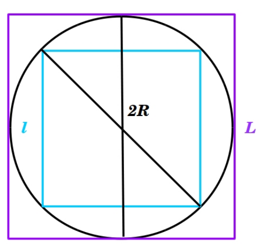
b) Vamos chamar de x a quantidade a mais de cachorros a serem adotados. Ao adotar x cachorros o número total de animais será de $24 + x$. Para que a quantidade de gatos, que é 6, seja de pelo menos 20% do total de animais devemos ter que

$$(24 + x)\frac{20}{100} = 6.$$

Assim, temos que $24 + x = 30$ e portanto $x = 6$. Com isso, a quantidade máxima de cachorros que podem ser adotados é 6 pois uma vez adotado seis cachorros o número de gatos é exatamente 20% do total de animais.

Questão 3 (20 pontos) Considere um círculo de raio R. Chamemos por l o lado do quadrado inscrito ao circulo e L o lado do quadrado circunscrito ao círculo. Calcule a razão l/L.

Solução: Da geometria do problema temos que o lado do quadrado circunscrito é igual ao diâmetro do círculo, ou seja, $L = 2R$. Para o quadrado inscrito vamos provar a realação $l = \sqrt{2}R$. Para isso observe que a diagonal do quadrado inscrito é igual ao diâmetro do círculo. Para calcular o comprimento da diagonal considere o triângulo retângulo formado pelos lados do quadrado inscrito e por sua diagonal. Pelo teorema de pitágoras temos que $l^2 + l^2 = (2R)^2$, então $l^2 = 2R^2$. Como l e R são números positivos temos que $l = \sqrt{2}R$. Portanto, $\frac{l}{L} = \frac{\sqrt{2}R}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Questão 4 (20 pontos) Deseja-se transportar cereais utilizando caixas cúbicas que serão colocadas dentro de um container de dimensões 1,8m x 1,5m x 3,0m. As caixas cúbicas são todas do mesmo tamanho, perfeitamente encaixadas dentro do container, sem espaço entre elas e de forma a se ter a menor quantidade possível de caixas.

a) Qual deve ser o tamanho da aresta das caixas cúbicas utilizadas?

b) Quantas caixas serão necessárias?

Solução:

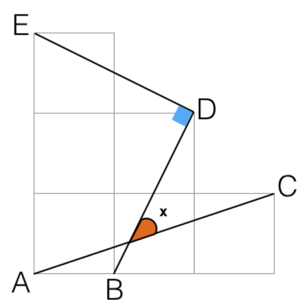
a) Como queremos que as caixas cúbicas caibam perfeitamente no container, a aresta da caixa deve ser um divisor comum das dimensões do cubo. Como queremos o menor número de caixas, então esse divisor deve ser o maior possível.
Como as dimensões do container em centímetros são $180, 150$ e 300 devemos calcular o seguinte

$$MDC(180, 150, 300) = 30.$$

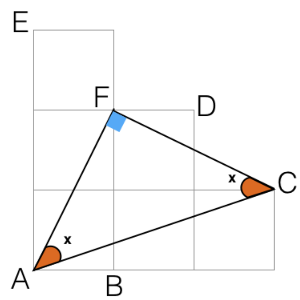
Sendo assim, a areasta da caixa deve ser de 30 cm.

b) Observe que são necessárias 6 caixas para preencher os 180cm de largura do container, 5 caixas para preencher os 150 cm de profundidade e 10 caixas para preencher os 300 cm de altura do container. Sendo assim, a quantidade de caixas necessárias para preencher o container é de $6 * 5 * 10 = 300$.

Questão 5 (20 pontos) Na figura a seguir todos os quadrados possuem lado de mesmo tamanho. Encontre o valor do ângulo x.



Solução: A ideia é fazer translações adequadas dos segmentos BD e ED como ilustrado na figura a seguir:



O ângulo FAC é x por ser uma translação do segmento BD. Para ver que o ângulo FCA é x, basta notar que o segmento AF tem mesmo tamanho que FC, assim o triângulo AFC é isósceles e portanto os ângulos da base são iguais. Logo, como a soma dos ângulos de um triângulo é 180, temos que $x + x + 90 = 180$. Portanto, $x = 45$.