Gabarito Segunda Fase 2018 - Nível Beta

Questão 1 Em uma certa academia há três tipos diferentes de barras de ferro. Algumas delas são de 1kg, outras de 2kg e outras de 3kg. Sabe-se que no total a academia possui 47 barras de ferro e que a soma dos pesos de todas elas é de 100kg. A academia possui mais barras de 1 kg ou de 3 kg?

Solução: Seja x a quantidade de barras de 1kg, y a quantidade de barras de 2kg e z a quantidade de barras de 3kg, como no total a academia possui 47 barras temos:

$$x + y + z = 47. \tag{1}$$

O enunciado também nos diz que a soma dos pesos de todas as barras é de 100kg, logo

$$x + 2y + 3z = 100. \tag{2}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo da segunda temos:

$$x + 2y + 3z - (2x + 2y + 2z) = 100 - 2 \times 47 \Rightarrow z - x = 6.$$

Em particular temos $z > x$. Concluimos assim que a academia possui mais barras de 3kg do que barras de 1kg.

Questão 2 Para cada tripla de números naturais (a, b, c) defina $M(a, b, c)$ como sendo o valor mínimo atingido pela função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Por exemplo, $M(1, 3, 1)$ é o valor mínimo atingido por $f(x) = x^2 + 3x + 1$ que é $M(1, 3, 1) = -\frac{5}{4}$.

a) Determine o maior valor possível para $M(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Ao escolhermos a, b e c ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule a probabilidade de obtermos a igualdade

$$M(a, b, c) = 0.$$

Solução:

a) Sabemos que o valor mínimo atingido por uma função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ é dado por $\frac{-\Delta}{4a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Ou seja,

$$M(a, b, c) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow M(a, b, c) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Observe que para encontrarmos o maior valor possível para esta última expressão precisamos maximizar o valor de "c" e minimizar o valor do termo que está sendo subtraído "$b^2/4a$".

- Como queremos $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ então o maior valor que podemos tomar para c é $c = 5$.
- Agora precisamos encontrar o mínimo de $b^2/4a$. Para isto precisamos minimizar o numerador b^2 e maximizar o denominador $4a$. Como $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ então o menor valor possível para b^2 ocorre quando $b = 1$. Como $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ então o maior valor possível para $4a$ ocorre quando $a = 5$.

Ou seja, o maior valor possível para $M(a, b, c)$ quando $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é

$$M(5, 1, 5) = 5 - \frac{1^2}{4 \times 5} = 5 - \frac{1}{20} = \frac{99}{20}.$$

b) Precisamos encontrar a probabilidade de termos

$$0 = M(a, b, c) = c - \frac{b^2}{4a} \Rightarrow 4ac = b^2.$$

Para isto contaremos quantos são os casos favoráveis, ou seja, em quantos sorteios a tripla (a, b, c) satisfaz a equação $4ac = b^2$ e dividiremos pelo número de casos totais.

Suponha que uma tripla (a, b, c) satisfaz $4ac = b^2$. Então, como $4ac$ é um número par segue que b^2 deve ser um número par e, portanto, b deve ser par. Ou seja, como $1 \leq b \leq 5$ só podemos ter $b = 2$ ou $b = 4$.

- Se $b = 2$ temos
$$4ac = 2^2 \Rightarrow ac = 1.$$
Como $1 \leq a, c \leq 5$ a única possibilidade é então $a = c = 1$. Ou seja, a tripla $(1, 2, 1)$ está entre os casos favoráveis.

- Se $b = 4$ temos
$$4ac = 4^2 \Rightarrow ac = 4.$$
Assim podemos ter $(a, c) \in \{(1, 4),\ (4, 1),\ (2, 2)\}$. Ou seja, obtemos neste caso três triplas favoráveis $(1, 4, 4)$, $(4, 4, 1)$, e $(2, 4, 2)$.

No total obtivemos 4 casos favoráveis. O número de casos totais, ou seja, o número de possibilidades de sorteios de triplas (a, b, c) com $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é $5 \times 5 \times 5 = 125$. Logo, a probabilidade de que a tripla sorteada satisfaça $M(a, b, c) = 0$ é igual a
$$P_{M(a,b,c)=0} = \frac{4}{125}.$$

Questão 3 Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ uma PA (progressão aritmética) de números reais. Sabendo que:

1) $a_2 = 1$;

2) os termos a_1, a_4, a_{13} formam uma PG de razão $q \neq 1$;

Calcule a razão da PA e determine o valor do termo a_{27}.

Solução: Primeiramente vamos fixar as notações. Denotemos

- $a := a_1$;
- r a razão da PA $a_1, a_2, \ldots$;
- como no enunciado denotaremos por q a razão da PG a_1, a_4, a_{13}.

O item (2) nos diz que a_1, a_4, a_{13} é uma PG, ou seja:

$$a_4 = q \cdot a, \;\; a_{13} = q^2 \cdot a. \tag{3}$$

Por outro lado, como a sequência $(a_n)_n$ é uma PA de razão r temos

$$a_4 = a + 3r, \;\; a_{13} = a + 12r.$$

Substituindo em (3) temos

$$a + 3r = q \cdot a, \tag{4}$$

e

$$a + 12r = q^2 \cdot a. \tag{5}$$

Multiplicando (4) por 4 e subtraindo de (5) temos

$$a + 12r - 4a - 12r = q^2 \cdot a - 4q \cdot a \Rightarrow -3a = q^2 \cdot a - 4q \cdot a.$$

Agora temos duas possibilidades, ou $a = 0$ ou $q^2 - 4q = -3$.

Se $a = 0$, ou seja, se $a_1 = 0$ então como a_1, a_4, a_{13} formam uma PG temos $a_4 = a_{13} = 0$. Neste caso teremos

$$0 = a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow 3r = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Mas isto implicaria $a_2 = a_1 + r = 0 + 0 = 0$ o que contradiz a hipótese (1) de que $a_2 = 1$. Ou seja, de fato $a \neq 0$ e, portanto, devemos ter

$$q^2 - 4q = -3 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0 \Rightarrow q = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

portanto

$$q = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ ou } q = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Pelo segundo item do enunciado já sabemos que $q \neq 1$. Logo concluímos que a razão da PG é

$$q = 3.$$

Assim, substituindo $q = 3$ na equação (4) temos

$$a + 3r = 3a \Rightarrow r = \frac{2a}{3}.$$

Agora, pelo primeiro item do enunciado $a_2 = 1$. Por outro lado $a_2 = a + r$, ou seja,

$$a + r = 1 \Rightarrow a + \frac{2a}{3} = 1 \Rightarrow \frac{5a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{5},$$

concluindo que o primeiro termo da PA é $3/5$. Finalmente obtemos

$$r = \frac{2a}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Assim a razão da PA é $2/5$. A partir da razão e do valor do primeiro termo podemos calcular facilmente o termo a_{27}:

$$a_{27} = a + 26 \cdot r = \frac{3}{5} + 26 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3+52}{5} = 11.$$

Questão 4 Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, e sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais satisfazendo

$$f(x) \cdot g(x) = c \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f e g não podem ser ambas bijetoras.

Solução: Faremos a demonstração por absurdo.

Suponhamos que as funções f e g sejam ambas bijetoras. Neste caso, como f é sobrejetora existe um número real x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Assim,

$$c = f(x_0) \cdot g(x_0) = 0 \cdot g(x_0) = 0,$$

ou seja, devemos ter $c = 0$.

Substituindo $c = 0$ na equação dada no enunciado obtemos

$$f(x) \cdot g(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Em particular temos

$$f(1) \cdot g(1) = 0, \tag{6}$$

$$f(2) \cdot g(2) = 0, \tag{7}$$

$$f(3) \cdot g(3) = 0. \tag{8}$$

Observe que (6) nos diz que $f(1) = 0$ ou $g(1) = 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(1) = 0$. Neste caso, como f é injetora devemos ter

$$f(2) \neq f(1) \quad \text{e} \quad f(3) \neq f(1)$$

ou seja, $f(2) \neq 0$ e $f(3) \neq 0$. Mas então pelas equações (7) e (8) obtemos $g(2) = 0$ e $g(3) = 0$. Em particular $g(2) = g(3)$ contradizendo a injetividade da função $g(x)$. Ou seja, ao assumir que ambas são bijetoras caímos em uma contradição. Logo, duas funções satisfazendo a condição do enunciado não podem ser ambas bijetoras. $\square$

Questão 5 Seja $ABCD$ um quadrado com lados de comprimento 8 cm e Γ a circunferência inscrita a $ABCD$. Denote por O o centro de Γ. Seja E um ponto sobre o lado AB de forma que o segmento de reta que liga A a E tem comprimento igual a 1 cm. Seja F a interseção do segmento de reta EO com Γ, considere G a interseção da reta AF com o lado BC. Calcule o comprimento do segmento BG.

Solução: A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado.

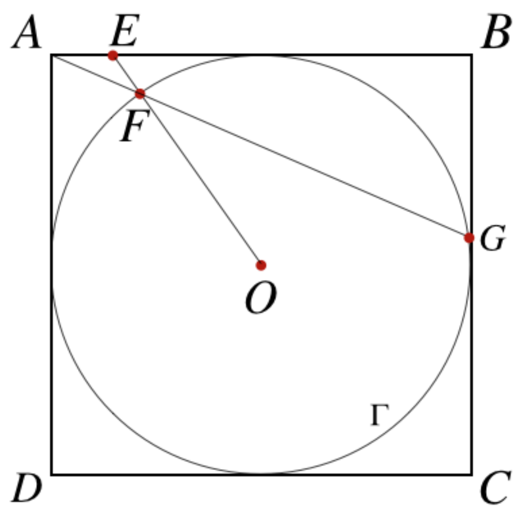

Figura 1: Figura inicial

Denotemos por α o ângulo $\angle BAG$. Observe então que

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BG}}{8}$$

$$\Rightarrow \overline{BG} = 8 \cdot \tan\alpha. \tag{9}$$

Portanto, basta calcularmos $\tan\alpha$.

Consideremos H o ponto de interseção de Γ com o lado AB como na figura 2. O ângulo $\angle OHA$ é reto e, além disso, $\overline{OH} = 4$cm pois corresponde ao raio de Γ que é igual a metade do lado do quadrado $ABCD$. Agora observe que

- $\overline{EH} = \overline{AH} - \overline{AE} = (4-1)cm = 3$ cm;

- por pitágoras $\overline{EO}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{OH}^2 \Rightarrow \overline{EO} = 5$ cm;
- $\overline{OF} = \overline{OH} = 4$cm pois $\overline{OF}$ é o raio de Γ, logo

$$\overline{EF} = \overline{EO} - \overline{OF} = (5-4)\ cm = 1\ cm.$$

Assim, o triângulo AEF é isósceles pois $\overline{AE} = \overline{EF} = 1$ cm. Consequentemente temos

$$\angle EFA = \angle EAF = \alpha.$$

Portanto o ângulo externo $\angle HEO$ é dado por

$$\angle HEO = \angle EFA + \angle EAF = 2\alpha.$$

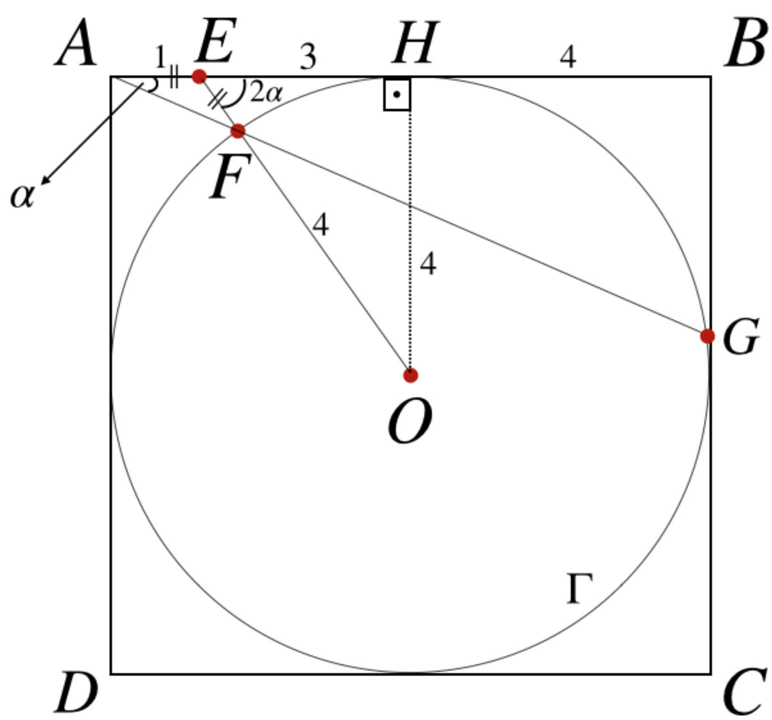

Figura 2: O triângulo AEF é isósceles e $\angle HEO = 2\alpha$.

Olhando para o triângulo retângulo EHO temos

$$\tan 2\alpha = \tan(\angle HEO) = \frac{\overline{OH}}{\overline{EH}} = \frac{4}{3}.$$

Como precisamos determinar $\tan\alpha$ utilizaremos a tangente da soma de arcos. Sabemos que

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

assim, pela equação anterior temos

$$\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow 6\cdot\tan\alpha = 4-4\cdot\tan^2\alpha \Rightarrow 2\cdot\tan^2\alpha + 3\cdot\tan\alpha - 2 = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau temos,

$$\tan\alpha = \frac{-3\pm\sqrt{3^2+4\times2\times2}}{4} = \frac{-3\pm5}{4},$$

logo $\tan\alpha = 1/2$ ou $\tan\alpha = -2$. Como $0 \le \alpha < \pi/2$ então só podemos ter $\tan\alpha = 1/2$.

Substituindo em (9) temos

$$\overline{BG} = 8\cdot\tan\alpha = 8\cdot\frac{1}{2} = 4\ cm.$$