Gabarito Segunda Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Uma matriz A de tamanho $n \times n$ é dita super binária se cada linha e cada coluna de A tem exatamente um elemento igual a 1 e todos os demais elementos iguais a 0. Por exemplo, as matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são super binárias.

1. Quantas matrizes super binárias de tamanho 3×3 existem?

2. Existe uma matriz super binária A de tamanho 4×4 cujo determinante seja nulo?

Solução:

1. Observe primeiramente que existem exatamente 2 matrizes super binárias 2×2 que são

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, se A é uma matriz super binária de tamanho 3×3 então o número 1 da primeira linha só pode estar na coluna 1, na coluna 2 ou na coluna 3 e, em cada caso, os demais elementos dessa coluna só podem ser 0. Ou seja, A deve ter um dos seguintes formatos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que, em cada um dos casos anteriores, a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deve ser uma matriz super binária 2×2. Como há apenas 2 matrizes desse tipo então cada um dos 3 formatos exibidos acima gera 2 matrizes super binárias. Portanto temos um total de 6 matrizes super binárias de tamanho 3×3 e elas são dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Solução 1:** Seja A uma matriz super binária de tamanho 4×4. Sabemos que A tem determinante nulo se, e somente se, o sistema linear homogêneo

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tem infinitas soluções. Consideremos tal sistema e vamos então avaliar suas soluções. Observe que as linhas da matriz A são, não necessariamente nesta ordem,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w,$$

então as entradas da matriz 4×1, $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ são, em alguma ordem, x, y, z e w. Portanto a única solução para o sistema inicial é $x = y = z = w = 0$, ou seja, o sistema linear homogêneo possui uma única solução, donde segue que $\det A \neq 0$.

2. **Solução 2:** Suponha que A é uma matriz super binária de tamanho 4×4. Como cada linha e cada coluna de A tem exatamente um elemento 1, uma das colunas de A é da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Caso esta coluna não seja a primeira coluna de A, troque ela de posição com a primeira coluna de A. Assim obtemos uma nova matriz A_2 que agora tem o formato

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Agora, como apenas trocamos a ordem de duas colunas, a matriz A_2 continua sendo super binária, pois continua tendo exatamente um 1 em cada linha e em cada coluna. Logo, uma de suas colunas é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se esta coluna não estiver na segunda posição troque ela com a coluna que está na segunda posição.

Após esse processo obteremos uma matriz A_3 super binária da forma:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Finalmente, uma das duas últimas colunas é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se ela for a quarta coluna, troque ela de posição com a terceira coluna. Após fazer esse processo chegaremos na matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, lembremos do seguinte fato: trocar a ordem de duas colunas de uma matriz troca o sinal do determinante mas não o valor absoluto do determinante. Assim, como em cada passo anterior apenas trocamos colunas da matriz, o valor absoluto do determinante da matriz inicial é igual ao valor absoluto do determinante da matriz final que no caso é 1. Logo, o determinante da matriz A é 1 ou -1, mas nunca zero. Portanto, toda matriz super binária 4×4 tem determinante não nulo.

2. **Solução 3:**

Suponha que A é uma matriz super binária 4×4. Então, similar ao feito no item (1), o elemento 1 da primeira linha deve estar na primeira, segunda, terceira ou quarta coluna e, em cada caso, os demais elementos da respectiva coluna devem ser 0. Assim, a matriz deve ter um dos seguintes formatos,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & c \\ d & 0 & e & f \\ g & 0 & h & i \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \text{ou } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \end{pmatrix},$$

onde a matriz $B := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ é uma matriz super binária de tamanho 3×3. Agora observe que ao calcularmos o determinante das matrizes A_1, A_2, A_3 e A_4 expandindo por cofatores ao longo da primeira linha temos:

$$\det A_1 = (-1)^2 \det B, \quad \det A_1 = (-1)^3 \det B,$$

$$\det A_3 = (-1)^4 \det B, \quad \det A_4 = (-1)^5 \det B.$$

Logo, as equações obtidas entre os determinantes implicam que existe uma matriz super binária 4×4 com determinante nulo se, e somente se, existir uma matriz super binária B, 3×3, com determinante nulo. Analogamente, existe uma matriz super binária 3×3 com determinante nulo se, e somente se, existe uma matriz super binária de tamanho 2×2 com determinante nulo. Mas as duas matrizes super binárias 2×2 tem determinantes não nulos. Portanto, toda matriz super binária 4×4 tem determinante não nulo.

Questão 2 (20 pontos) Seja S um conjunto de quatro números naturais. Prove que podemos tomar dois números naturais distintos $a, b \in S$ de forma que $a - b$ seja múltiplo de 3.

Solução 1: Considere $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Sabemos que cada a_i se escreve como um múltiplo de 3 mais um resto que pode ser 0, 1 ou 2, ou seja, podemos escrever

$$a_i = 3q_i + r_i, 1 \leq i \leq 4,$$

onde $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}$ e $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{0, 1, 2\}$. Como temos quatro r_i's em $\{0, 1, 2\}$ (que tem apenas três elementos), dois desses r_i's são iguais. Sem perda de generalidade assuma que $r_1 = r_2$. Neste caso temos

$$a_1 = 3q_1 + r_1 \quad \text{e} \quad a_2 = 3q_2 + r_2 = 3q_2 + r_1.$$

Assim,

$$a_1 - a_2 = 3q_1 + r_1 - 3q_2 - r_1 = 3(q_1 - q_2)$$

que é um múltiplo de 3. Logo, existem dois números em S que subtraídos nos dão um múltiplo de 3, como queríamos demonstrar. $\square$

Solução 2: Dado qualquer número natural sabemos que a divisão deste número por 3 pode deixar resto 0, resto 1 ou resto 2. Ou seja, há três possibilidades de resto. Na divisão por 3. Uma vez que S possui quatro elementos, pelo princípio da casa dos pombos, existem dois elementos, digamos a e b, em S que deixam o mesmo resto na divisão por 3. Em outras palavras

$$a \equiv b \pmod 3.$$

Logo $a - b \equiv 0 \pmod 3$ o que significa que $a - b$ é múltiplo de 3 como queríamos demonstrar. $\square$

Questão 3 (20 pontos) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$f(1-x) + 2f(x) = 3x^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Determine os possíveis valores para $f(2017)$.

b) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos
$$f(x) \geq -2.$$

Solução: Primeiramente, substituindo x por $1-x$ na equação do enunciado obtemos:

$$f(1-(1-x)) + 2f(1-x) = 3(1-x)^2 \Rightarrow f(x) + 2f(1-x) = 3(1-x)^2.$$

Então temos um sistema com duas equações:

$$\begin{aligned} f(1-x) + 2f(x) &= 3x^2 \\ f(x) + 2f(1-x) &= 3(1-x)^2. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda temos:

$$2f(1-x) + 4f(x) - f(x) - 2f(1-x) = 6x^2 - 3(1-x)^2$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 6x^2 - 3(1-x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - (1-x)^2 = x^2 + 2x - 1.$$

Agora vamos às alternativas.

a) O valor de $f(2017)$ é

$$f(2017) = (2017)^2 + 2 \cdot 2017 - 1 = 4072322.$$

b) Como f é uma função do segundo grau, o mínimo de $f(x) = x^2 + 2x - 1$ é atingido no ponto

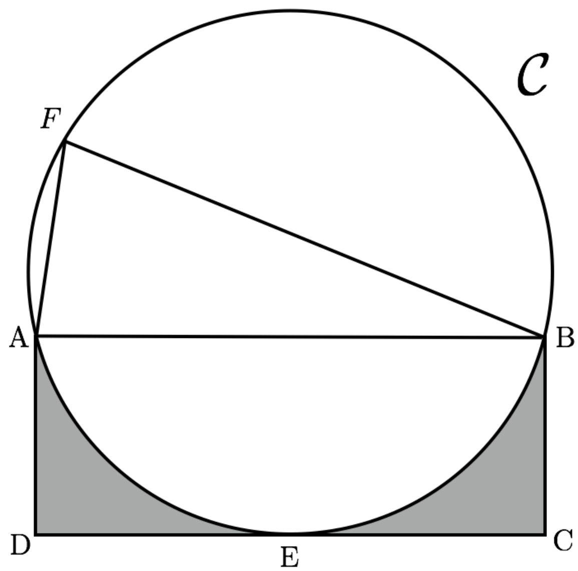
$$x_0 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$

e o valor mínimo de f é

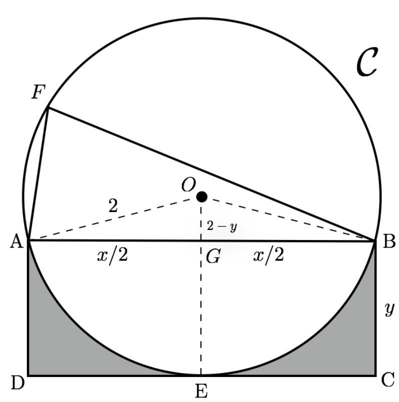
$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2.$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) \geq -2$ como queríamos demonstrar. $\square$

Questão 4 (20 pontos) Na figura a seguir $\mathcal{C}$ é uma circunferência de raio $R = 2$, AFB é um triângulo inscrito em $\mathcal{C}$ e $ABCD$ é um retângulo que intersecta a circunferência nos pontos A e B e é tangente à circunferência no ponto E. Sabendo que o ângulo $\widehat{AFB}$ é igual a $75°$ calcule a área da região hachurada na figura.



Solução: Consideremos O o centro da circunferência $\mathcal{C}$ e considere G o ponto de interseção do segmento OE com o segmento AB conforme na figura abaixo.



Observe que como OE é perpendicular a DC (pois DC tangencia $\mathcal{C}$ em E) e AB é paralelo a DC então $\widehat{OGB} = 90°$.

Chame x o tamanho do lado AB e y o tamanho do lado BC do retângulo $ABCD$. Vamos calcular x e y.

Pela lei dos senos aplicada ao triângulo ABF, como o raio da circunferência circunscrita a este triângulo é 2 segue que:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(\widehat{AFB})} = 2 \cdot R = 4 \Rightarrow x = 4\operatorname{sen}(75°).$$

Agora, $\operatorname{sen}(75°) = \operatorname{sen}(30° + 45°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$. Logo

$$x = (1 + \sqrt{3})\sqrt{2}.$$

Agora, usando o teorema de pitágoras no triângulo OGB temos:

$$2^2 = (2 - y)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 = (2 - y)^2 + \frac{x^2}{4}.$$

Substituindo o valor encontrado para x temos:

$$4 = (2 - y)^2 + \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} \Rightarrow 4 = (2 - y)^2 + 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (2 - y)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = 2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Agora que temos os valores de x e y conseguimos calcular a área do retângulo $ABCD$. Vamos agora calcular a área do setor circular determinado pelo ângulo $\widehat{AOB}$.

Como $\widehat{AFB} = 75°$ sabemos que $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{AFB} = 150°$. Logo, a área do setor circular é:

$$A_{setor} = \frac{150 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{5\pi}{3}.$$

Seja $A_{\triangle AOB}$ a área do triângulo AOB, observe que a área hachurada é dada por:

$$A_{hachurada} = x \cdot y - (A_{setor} - A_{\triangle AOB}).$$

A área $A_{\triangle AOB}$ é dada por:

$$A_{\triangle AOB} = \frac{AB \cdot GO}{2} = \frac{x(2-y)}{2} = x - \frac{xy}{2}.$$

Logo,

$$A_{hachurada} = x \cdot y - (A_{setor} - A_{\triangle AOB}) = xy - \left(\frac{5\pi}{3} - x + \frac{xy}{2}\right)$$

$$= \frac{xy}{2} + x - \frac{5\pi}{3} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{2-\sqrt{3}})}{2} + (1+\sqrt{3})\sqrt{2} - \frac{5\pi}{3}$$

$$= (1+\sqrt{3})\sqrt{2} \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) - \frac{5\pi}{3}.$$

Questão 5 (20 pontos) Um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual do que 3 é dito palíndromo se todos os seus coeficientes são números inteiros não negativos e

$$p(x) = x^3 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{para todo real } x \neq 0.$$

Encontre todos os polinômios palíndromos tais que $p(10) = 7887$.

Solução: Suponhamos que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ seja um polinômio palíndromo. Em particular $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_+$. Como p é palíndromo sabemos que

$$p(x) = x^3 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{para todo real } x \neq 0,$$

ou seja,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3\left(a\frac{1}{x^3} + b\frac{1}{x^2} + c\frac{1}{x} + d\right)$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = a + bx + cx^2 + dx^3, \qquad \text{para todo real } x \neq 0.$$

A última equação nos diz que os polinômios $ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $dx^3 + cx^2 + bx + a$ são iguais, o que só é possíveis se o coeficiente de x^3 no primeiro polinômio for igual ao coeficiente de x^3 no segundo, o coeficiente de x^2 no primeiro polinômio for igual ao coeficiente de x^2 no segundo e assim por diante, isto é:

$$a = d, \quad b = c, \quad c = b \quad \text{e} \quad d = a.$$

Logo concluimos que $a = d$ e $b = c$, portanto o polinômio $p(x)$ tem o formato:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a,$$

para certos $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Agora, sabemos que $p(10) = 7887$, portanto

$$10^3 a + 10^2 b + 10b + a = 7887.$$

Em particular $a < 10$. Observe então que o resto que o lado direito deixa na divisão por 10 é 7, e o resto que o lado esquerdo deixa na divisão por 10 é a. Logo $a = 7$. Agora, substituindo $a = 7$ na última equação temos:

$$7000 + 100b + 10b + 7 = 7887 \Rightarrow 110b = 880 \Rightarrow b = 8.$$

Logo a única possibilidade é $a = 7$ e $b = 8$ donde concluímos que o único polinômio palíndromo satisfazendo as condições do enunciado é

$$p(x) = 7x^3 + 8x^2 + 8x + 7.$$