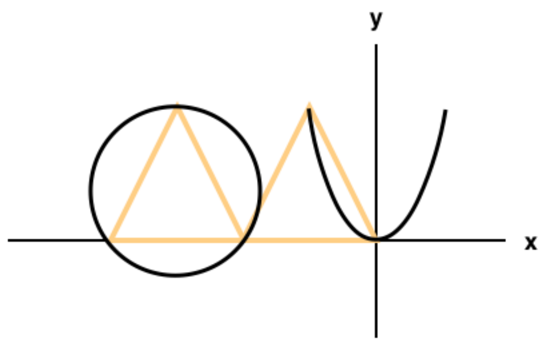
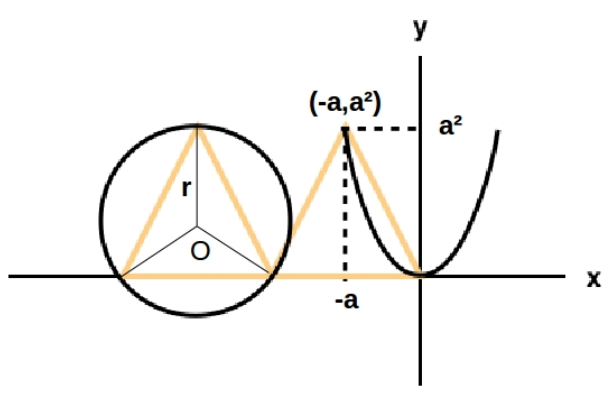
Gabarito da Prova da Primeira Fase 2017 - Nível Beta

Questão 1 (10 pontos) O logo da OMU é formado por uma cincunferência, dois triângulos equiláteros congruentes e uma parábola como mostra a figura abaixo. Sabendo que a circunferência está circunscrita a um dos triângulos e que a parábola é descrita pela função $f(x) = x^2$ e passa por dois vértices do triângulo que possui um vértice em $(0, 0)$, calcule o comprimento da circunferência.



Solução: Primeiro vamos calcular o lado dos triângulos equiláteros congruentes. Temos que o triângulo que intercepta a parábola tem como vértices os pontos $(0, 0)$ e $(-a, a^2)$, para algum $a > 0$ (veja na figura abaixo).



Sendo assim, o lado do triângulo é $2a$ e portanto sua altura é $a\sqrt{3}$. Igualando a altura do triângulo com a ordenada do vértice $(-a, a^2)$ obtemos que $a = \sqrt{3}$. Logo, o lado do triângulo é $2\sqrt{3}$. Agora, vamos calcular o raio da circunferência cirscunscrita ao triângulo. Sabendo que em um triângulo equilátero o baricentro e o circuncentro coincidem obtemos que o raio é igual a dois terços da altura, ou seja, $r = \frac{2}{3} \times 3 = 2$. Portanto, o comprimento da circunferência é 4π.

Questão 2 (10 pontos)

a) Prove que, para quaisquer números reais positivos a e b, temos

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

com igualdade se, e somente se, $a = b$.

b) Determine o maior valor possível para a expressão

$$\sqrt{2(z-y)\sqrt{xy}}$$

onde x, y, z são números reais positivos satisfazendo $z > y$ e $x + z = 2017$.

Solução:

a) Dados quaisquer números reais positivos a e b sabemos que $(a-b)^2 \geq 0$ com igualdade se, e somente se, $a = b$. Assim,

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow \sqrt{(a+b)^2} \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

com igualdade se, e somente se $a = b$, concluindo o que queríamos demonstrar. $\square$

b) Primeiramente observemos que, pela alternativa (a), temos

$$2\sqrt{xy} \leq x + y$$

com igualdade se, e somente se, $x = y$.

Portanto,

$$\sqrt{2(z-y)\sqrt{xy}} \leq \sqrt{(z-y)(x+y)}$$

com igualdade se, e somente se, $x = y$. Novamente pela alternativa (a) temos

$$\sqrt{(z-y)(x+y)} \leq \frac{(z-y)+(x+y)}{2} = \frac{z+x}{2}$$

com igualdade se, e somente se, $z - y = x + y$. Assim, juntando as duas igualdades anteriores e considerando que $x + z = 2017$ temos que

$$\sqrt{2(z-y)\sqrt{xy}} \leq \sqrt{(z-y)(x+y)} \leq \frac{z+x}{2} = \frac{2017}{2}$$

com igualdade se, e somente se, $x = y$ e $z - y = x + y$. Logo a igualdade ocorre se $z = 3x$. Mas como $x + z = 2017$ então $4x = 2017 \Rightarrow$

$$y = x = \frac{2017}{4} \quad \text{e} \quad z = 3 \cdot \frac{2017}{4} = \frac{6051}{4}.$$

Ou seja, o maior valor possível para a expressão dada é $\frac{2017}{2}$.

Questão 3 (20 pontos) Dado a seguinte matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule as matrizes A^2 e A^3.

b) Determine A^n, para todo natural $n \geq 2$.

Solução:

a) Fazendo a multiplicação de matrizes temos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Baseado nos resultados obtidos na alternativa (a) afirmamos que, para todo $n \geq 1$ temos

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

De fato para $n = 1$ a afirmação é verdadeira. Suponha que seja verdadeira para um certo $n \geq 1$ e vamos provar que é verdadeira para $n+1$. Como $A^{n+1} = A^n \cdot A$, pela hipótese de indução temos,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} - 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

o que prova que a afirmação é verdadeira para $n+1$. Assim, por indução finita concluímos que a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$, ou seja,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Questão 4 (20 pontos) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma PA com $a_1 = 7$ e razão r. Calcule

$$\sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}}$$

em função de r.

Solução: Primeiramente vamos dividir o problema em dois casos e trabalhar separadamente:

Caso 1: A razão é nula, ou seja, $r = 0$.
Neste caso temos $7 = a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{2017}$. Então

$$\sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} = \sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{7}} = \frac{2016}{2\sqrt{7}}.$$

Caso 2: $r \neq 0$.
Neste caso, uma vez que $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ é uma PA de razão r temos $a_k - a_{k-1} = r$ para todo $1 \leq k \leq 2017$. Assim, para todo $1 \leq k \leq 2017$ temos:

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} = \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{a_k - a_{k-1}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{r}.$$

Logo

$$\sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} = \sum_{k=2}^{2017} \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{r} = \frac{\sum_{k=2}^{2017} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}}{r}.$$

Mas observe que na somatória $\sum_{k=2}^{2017} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}$ vários termos se cancelam, restando apenas dois termos conforme mostrado abaixo:

$$\sum_{k=2}^{2017} \sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}} = \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_4} - \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_{2016}} - \sqrt{a_{2015}} + \sqrt{a_{2017}} - \sqrt{a_{2016}}$$

$$= \cancel{\sqrt{a_2}} - \sqrt{a_1} + \cancel{\sqrt{a_3}} - \cancel{\sqrt{a_2}} + \cancel{\sqrt{a_4}} - \cancel{\sqrt{a_3}} + \ldots + \cancel{\sqrt{a_{2016}}} - \cancel{\sqrt{a_{2015}}} + \sqrt{a_{2017}} - \cancel{\sqrt{a_{2016}}}$$

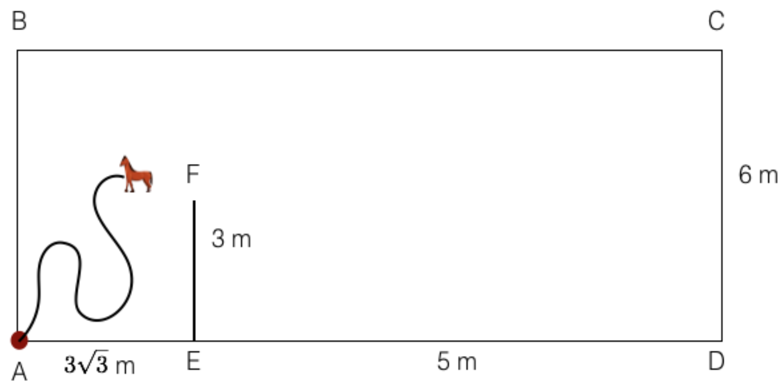
$$= \sqrt{a_{2017}} - \sqrt{a_1}.$$

Mas $a_1 = 7$ e $a_{2017} = a_1 + 2016 \cdot r = 7 + 2016 \cdot r$. Logo

$$\sum_{k=2}^{2017} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}}} = \frac{\sqrt{a_{2017}} - \sqrt{a_1}}{r} = \frac{\sqrt{7 + 2016r} - \sqrt{7}}{r},$$

concluindo o que queríamos.

Questão 5 (20 pontos) Hélio possui um jardim retangular $ABCD$, representado na figura abaixo, onde deseja plantar frutas. No ponto A está localizada uma estaca na qual Hélio amarra seu cavalo com uma corda de comprimento $6\sqrt{2}$ metros. No jardim há também um muro, representado pelo segmento EF, de três metros de comprimento. Ignorando o tamanho do cavalo, determine o máximo da área que Hélio poderá utilizar para plantar as frutas de forma que o cavalo não consiga comê-las.



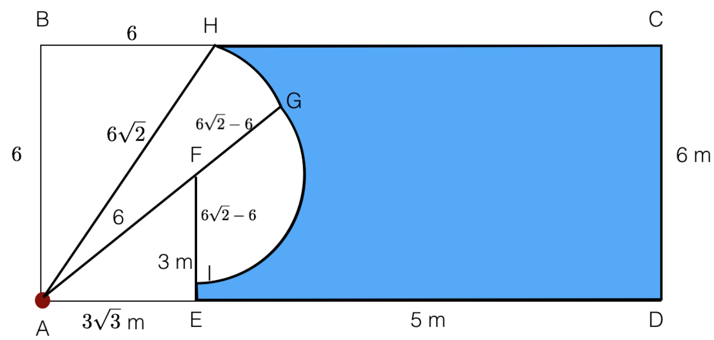
Solução: Ao longo da solução todas as medidas serão em metros. Para simplificar a escrita omitiremos a notação de metros durante a solução.

Denote por G o ponto extremo da corda quando ela toca o ponto F da parede EF e H o ponto em que a corda toca o lado BC quando estendida (veja a figura abaixo), em particular $AH = AG = 6\sqrt{2}$ que é o comprimento da corda. Pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{BH}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AH}^2$. Substituindo os valores $\overline{AB} = 6$ e $\overline{AH} = 6\sqrt{2}$ obtemos $\overline{BH} = 6$. Assim, o triângulo ABH é isósceles e $H\hat{A}B = B\hat{H}A = 45°$. Observe também que, por Pitágoras, $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 \Rightarrow 27 + 9 = \overline{AF}^2 \Rightarrow \overline{AF} = 6$. Logo $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6\sqrt{2} - 6$. Vamos provar que $\overline{FG} < 3$. Temos as seguintes equivalências:

$$\overline{FG} = 6(\sqrt{2} - 1) < 3 \Longleftrightarrow 6\sqrt{2} < 9 \Longleftrightarrow \sqrt{2} < \frac{3}{2} \Longleftrightarrow 2 < \frac{9}{4} \Longleftrightarrow 8 < 9.$$

Como a última desigualdade é verdadeira concluímos que $\overline{FG} < 3$. Chame de I o ponto que pertence ao segmento EF e cuja distância ao ponto F é $6(\sqrt{2} - 1)$.

A partir do ponto H o cavalo poderá pastar dentro de um setor circular de raio $6\sqrt{2}$ e ângulo $H\hat{A}G$, conforme mostra a figura abaixo, até que a corda toque o ponto F e depois, a partir de G, o cavalo poderá passar dentro de um setor circular de raio $\overline{FG} = 6\sqrt{2} - 6$ e ângulo $G\hat{F}I$. Veja a figura abaixo:



Vamos então calcular a área de cada uma das regiões demarcadas acima.

Área do triângulo ABH**:** Chame esta área de A_1. Então

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BH}}{2} = 18.$$

Área do triângulo AEF**:** Chame de A_2 esta área. Então

$$A_2 = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Área da região circular AHG**:** Chame A_3 esta área. Como já sabemos que $\overline{AH} = \overline{AG} = 6\sqrt{2}$, para obtermos A_3 precisamos calcular o ângulo $H\hat{A}G$. Chame $\alpha = F\hat{A}E$. Então

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo $\alpha = 30°$. Agora temos

$$H\hat{A}G = 90° - H\hat{A}B - F\hat{A}E = 90° - 45° - 30° = 15°.$$

Então a área da região circular AHG é dada por

$$A_3 = \frac{15}{360}\pi\overline{AH}^2 = \frac{1}{24}\pi(6\sqrt{2})^2 = 3\pi.$$

Área da região circular IFG**:** Similar ao caso anterior, já sabemos que o raio dessa região circular é $\overline{FG} = 6\sqrt{2} - 6$, então precisamos calcular o ângulo $G\hat{F}I$ para obter a área A_4 da região circular IFG. Como $E\hat{A}F = 30°$ então $A\hat{F}E = 60°$. Logo $G\hat{F}I = 180° - 60° = 120°$. Assim

$$A_4 = \frac{120}{360}\pi\overline{FG}^2 = \frac{1}{3}\pi(6\sqrt{2} - 6)^2 = 12\pi(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Finalmente, para calcular a área que Hélio pode usar para plantar as frutas devemos calcular a área do retângulo $ABCD$ e subtrair as áreas A_1, A_2, A_3 e A_4 calculadas acima. Logo, a área que Hélio poderá utilizar é:

$$\overline{ABCD} - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = 6(3\sqrt{3} + 5) - 18 - \frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\pi - 12\pi(\sqrt{2} - 1)^2 =$$
$$= 12 + \frac{27}{2}\sqrt{3} - 3\pi(13 - 8\sqrt{2}).$$

Logo, a área que Hélio poderá utilizar para plantar é de $12 + \frac{27}{2}\sqrt{3} - 3\pi(13 - 8\sqrt{2})$ metros quadrados.

Questão 6 (20 pontos) Mostre que, para todo número inteiro $n \geq 2$, temos

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt{\frac{2}{n}} + 1.$$

Solução : Considere $x = \sqrt[n]{n} - 1$. Então pelo Teorema do Binômio de Newton temos que:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k > \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{2} x^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Mas como $(x+1)^n = (\sqrt[n]{n})^n = n$ então temos

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \Rightarrow \frac{2n-2}{n(n-1)} > x^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > x^2.$$

Portanto

$$x < \sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{n} < \sqrt{\frac{2}{n}} + 1,$$

como queríamos demonstrar. □