Gabarito da Prova da Primeira Fase - Nível Alfa

Questão 1 (20 pontos) Seja n um número inteiro de dois algarismos cuja a soma é 11. A diferença entre esse número n e o número obtido invertendo-se os algarismos de n é 27. Encontre o valor de n.

Solução: Sejam a e b os algarismos das dezenas e das unidades de n, respectivamente. Isto é, $n = 10a + b$. Portanto, o número que obtemos ao inverter os algarismos de n é $10b + a$. Sendo assim, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ 10a + b - (10b + a) = 27 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $a = 7$ e $b = 4$. Portanto, $n = 74$.

Questão 2 (20 pontos) Uma loja de bicicletas vendeu duas bicicletas A e B por R$ 600,00 cada uma. Com a bicicleta A a loja obteve um lucro de 20% sobre o custo inicial. Com a bibicleta B a loja obteve um prejuízo de 20% sobre o custo inicial.

a) Qual era o custo inicial (em reais) da bicicleta A? De quanto foi o lucro sobre esta bicicleta (em reais)?

b) Qual era o custo inicial (em reais) da bicicleta B? De quanto foi o prejuízo sobre esta bicicleta (em reais)?

Solução:

a) Se x era o custo inicial da bicicleta A e ela foi vendida com lucro de 20% sobre x, então a bicicleta foi vendida pelo valor de $x + 0,2x = 1,2x$. Como a bicicleta foi vendida por R$ 600,00 então $1,2x = 600$, ou seja, $x = \frac{600}{1,2} = 500$. Logo, o custo inicial da bicicleta A era de R$$500,00$. Portanto, a loja obteve um lucro de R$$100,00$.

b) Se y era o custo inicial da bicicleta B e ela foi vendida com prejuízo de 20% sobre y, então a bicicleta foi vendida por $y - 0,2y = 0,8y$. Como a bicicleta foi vendida por R$ 600,00 então $0,8y = 600$, ou seja, $y = \frac{600}{0,8} = 750$. Logo, o custo inicial da bicicleta B era de R$$750,00$. Portanto, a loja obteve um prejuízo de R$$150,00$

Questão 3 (20 pontos) Dado um polígono regular, dizemos que um segmento de reta ligando dois vértices do polígono é uma diagonal do polígono se este segmento não for um lado do polígono. Mostre que a quantidade de diagonais de um polígono regular com n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.

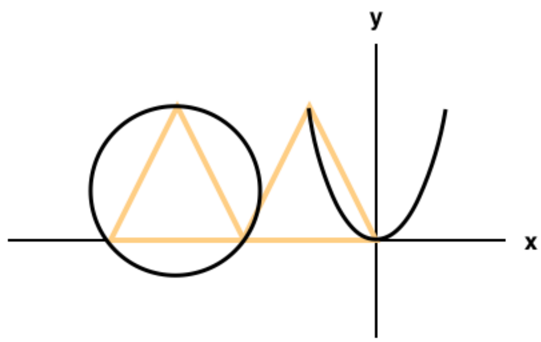
Solução: Fixemos um vértice qualquer. Temos $n-1$ escolhas para um segundo vértice, se não quisermos repetir o mesmo ponto, para ser possível traçar uma reta ligando eles. Dessas $n-1$ escolhas, 2 irão gerar lados do polígono (os dois vértices adjacentes à escolha inicial). Como consequência, pela definição de diagonal, temos exatamente $n-3$ diagonais partindo do vértice que escolhemos inicialmente.

Assim temos n vértices no total, sendo que cada vértice tem $n-3$ diagonais. Mas note que nesta descrição, cada diagonal foi contada exatamente duas vezes. Portanto a quantidade de diagonais do polígono é igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

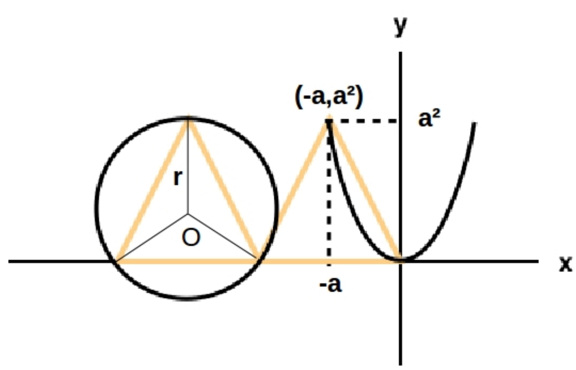
Questão 4 (20 pontos) Um grupo de universitários desenvolveu uma máquina de fazer tijolos. Devido as regras da universidade na primeira rodada de testes a máquina só pôde ser ligada 6 vezes e uma vez ligada permaneceu 15 minutos fazendo tijolos. Nesta primeira fase foram feitos 300 tijolos. Quantos tijolos serão produzidos no próximo ano sabendo que a máquina só poderá ser ligada em 10 ocasiões e durante 12 minutos por vez?

Solução: Note que na primeira rodada de testes a máquina ficou ligada $6 \times 15 = 90$ minutos e produziu 300 tijolos. Na segunda rodada ela ficará ligada um total de $12 \times 10 = 120$ minutos ligadas. Pela regra de três a máquina produzirá um total de y tijolos satisfazendo $y/120 = 300/90$, então $y = 400$. Logo, no próximo ano serão produzidos 400 tijolos.

Questão 5 (20 pontos) O logo da OMU é formado por uma cincunferência, dois triângulos equiláteros congruentes e uma parábola como mostra a figura abaixo. Sabendo que a circunferência está circunscrita a um dos triângulos e que a parábola é descrita pela função $f(x) = x^2$ e passa por dois vértices do triângulo que possui um vértice em $(0, 0)$, calcule o comprimento da circunferência.



Solução: Primeiro vamos calcular o lado dos triângulos equiláteros congruentes. Temos que o triângulo que intercepta a parábola tem como vértices os pontos $(0, 0)$ e $(-a, a^2)$, para algum $a > 0$ (veja na figura abaixo).



Sendo assim, o lado do triângulo é $2a$ e portanto sua altura é $a\sqrt{3}$. Igualando a altura do triângulo com a ordenada do vértice $(-a, a^2)$ obtemos que $a = \sqrt{3}$. Logo, o lado do triângulo é $2\sqrt{3}$. Agora, vamos calcular o raio da circunferência cirscunscrita ao triângulo. Sabendo que em um triângulo equilátero o baricentro e o circuncentro coincidem obtemos que o raio é igual a dois terços da altura, ou seja, $r = \frac{2}{3} \times 3 = 2$. Portanto, o comprimento da circunferência é 4π.