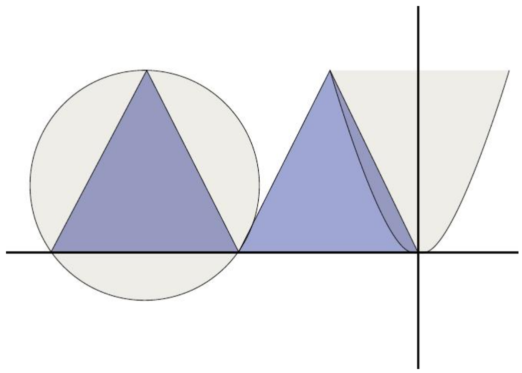
35° **Olimpíada de Matemática da Unicamp**
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Beta

16 de junho de 2019

Duração: 4 horas



Instruções

1. É **proibido destacar** as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.

2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no CADERNO DE RESPOSTAS.

3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.

4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.

5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.

6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.

7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do CADERNO DE RESPOSTAS. É permitido levar para casa o CADERNO DE QUESTÕES.

Questão 1 (20 pontos) Determine todas as triplas de números reais (x, y, z) satisfazendo o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1, \\ 3x - 4y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

Questão 2 (20 pontos) Considere a função $A(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definida por

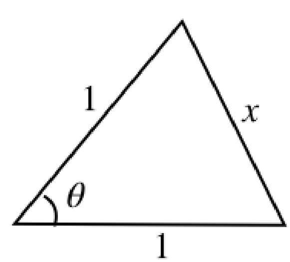
$$A\left(x\right) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}\right)^2} \cdots$$

Calcule $A(3), A(4)$ e $A(5)$ e verifique que:

$$A(3) + A(4) = A(5).$$

Questão 3 (20 pontos)

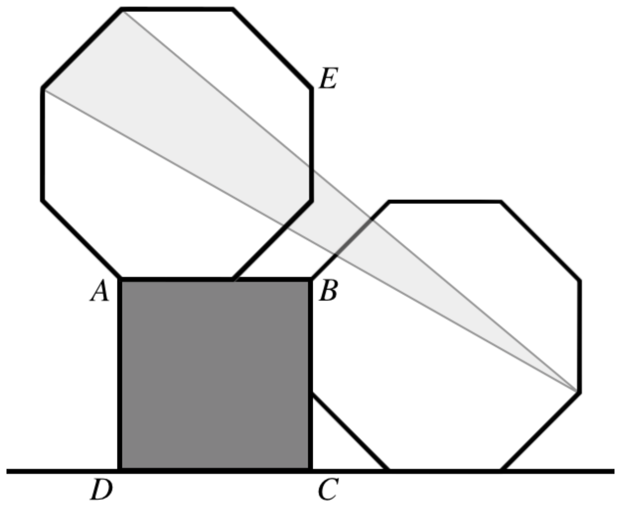
a) O desenho abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de tamanho 1 e com ângulo interno θ dado em radianos. Mostre que $x < \theta$.



b) Prove que para qualquer $0 \leq \theta \leq \pi$ temos

$$\operatorname{sen}\theta \leq \theta.$$

Questão 4 (20 pontos) A figura a seguir mostra dois octógonos regulares idênticos ambos com um lado intersectando um dos lados do quadrado $ABCD$ e de forma que os pontos E, B e C são colineares. Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é 1 determine a área do triângulo hachurado na figura.



Questão 5 (20 pontos) Dizemos que um número inteiro positivo m admite **decomposição primária** se para quaisquer primos positivos distintos p e q que dividem m, existirem inteiros não nulos a e b, primos entre si, tais que

$$m = a \cdot p + b \cdot q.$$

1) Mostre que 30 admite decomposição primária.

2) Mostre que se m é um número natural ímpar divisível por pelo menos três primos distintos, então m admite decomposição primária.