Gabarito Segunda Fase 2019 - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Determine todas as triplas de números reais (x, y, z) satisfazendo o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1, \\ 3x - 4y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

Solução : Usaremos as duas primeiras equações para escrever todas as variáveis em função de x e substituiremos na terceira equação.

Primeiramente, somando a primeira e a segunda equação obtemos:

$$4x - 2y = 2 \Rightarrow y = 2x - 1. \tag{1}$$

Agora substituindo $y = 2x - 1$ na segunda equação obtemos:

$$3x - 4 \cdot (2x - 1) + z = 1 \Rightarrow 5x - 2 - z = 1 \Rightarrow z = 5x - 3. \tag{2}$$

Substituindo então na terceira equação obtém-se:

$$2 = x^2 + (2x-1)^2 + (5x-3)^2 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 25x^2 - 30x + 9 = 30x^2 - 34x + 10.$$

Logo,

$$15x^2 - 17x + 4 = 0.$$

Pela fórmula de Bhaskara temos:

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 15 \times 4}}{2 \times 15} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{30} = \frac{17 \pm 7}{30}.$$

Assim, as duas soluções são:

$$x = \frac{17+7}{30} = \frac{4}{5}, \quad x = \frac{17-7}{30} = \frac{1}{3}.$$

Substituindo $x = \frac{4}{5}$ nas expressões de y e z dadas em (1) e (2) temos:

$$y = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}, \quad z = 4 - 3 = 1.$$

Assim uma solução é $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$.

Analogamente, substituindo $x = \frac{1}{3}$ nas expressões de y e z dadas em (1) e (2) temos:

$$y = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \quad z = -\frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3}$$

Logo as soluções são

$$\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5};\ 1\right), \quad \left(\frac{1}{3};\ \frac{-1}{3};\ \frac{-4}{3}\right).$$

Questão 2 (20 pontos) Considere a função $A(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definida por

$$A\left(x\right) = \sqrt[3]{x^2} \;\cdot\; \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2} \;\cdot\; \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}\right)^2} \cdots$$

Calcule $A(3), A(4)$ e $A(5)$ e verifique que:

$$A(3) + A(4) = A(5).$$

Solução 1: Observe que

$$(A(x))^3 = x^2 \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}\right)^2 \cdots = x^2 \cdot (A(x))^2.$$

Ou seja $(A(x))^3 = x^2(A(x))^2 \Rightarrow A(x) = x^2$.

Consequentemente, $A(3) = 9, A(4) = 16$ e $A(5) = 25$, concluindo portanto que $A(3) + A(4) = A(5)$ como queríamos.

Solução 2: Como $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, então

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{\frac{2}{3}} \cdot (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \cdot ((x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \cdots \\ &= x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot x^{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdots \\ &= x^{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots} \end{aligned} \tag{3}$$

A sequência

$$\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4, \ldots$$

é uma PG infinita de razão $q = 2/3$ e com primeiro termo $2/3$. Lembremos que dada uma PG infinita com primeiro termo a_1 e razão q, a soma de seus termos é dada por $\frac{a_1}{1-q}$.

Logo, a soma dos termos da PG de primeiro termo $2/3$ e razão $q = 2/3$ é

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots = \frac{2/3}{1-q} = \frac{2/3}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

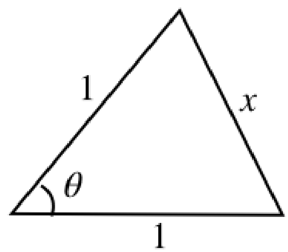
Assim, por (3) temos:

$$A(x) = x^2.$$

Logo $A(3) = 9, A(4) = 16$ e $A(5) = 25$, concluindo portanto que $A(3) + A(4) = A(5)$ como queríamos.

Questão 3 (20 pontos)

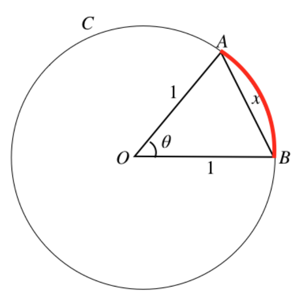
a) O desenho abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de tamanho 1 e com ângulo interno θ dado em radianos. Mostre que $x < \theta$.



b) Prove que para qualquer $0 \leq \theta \leq \pi$ temos

$$\operatorname{sen}\theta \leq \theta.$$

Solução: a) Considere O, A e B os lados do triângulo do enunciado e C a circunferência cujo centro é O e com raio 1 conforme a figura a seguir:

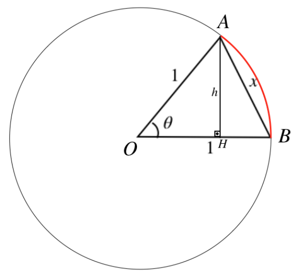


Lembremos que o comprimento do arco de ângulo θ em uma circunferência de raio R é dado por $l = \theta \cdot R$. Assim, o comprimento do arco em vermelho é dado por: $l = \theta \cdot 1 = \theta$. Agora observe que tal comprimento é maior do que o comprimento do segmento que liga A e B, pois o segmento que liga A até B é o caminho mais curto unindo estes pontos. Logo,

$$x < \theta$$

como queríamos demonstrar.

b) Se $\theta = 0$ então $\text{sen}(0) = 0$. Assim, podemos assumir agora que $\theta > 0$. No mesmo desenho da alternativa (a), considere H o ponto no lado OB tal que $AH \perp OB$.



Seja $h = \overline{AH}$ então $h \leq x$ pois x é o comprimento da hipotenusa no triângulo AHB. Além disso,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \frac{h}{1} = h.$$

Logo

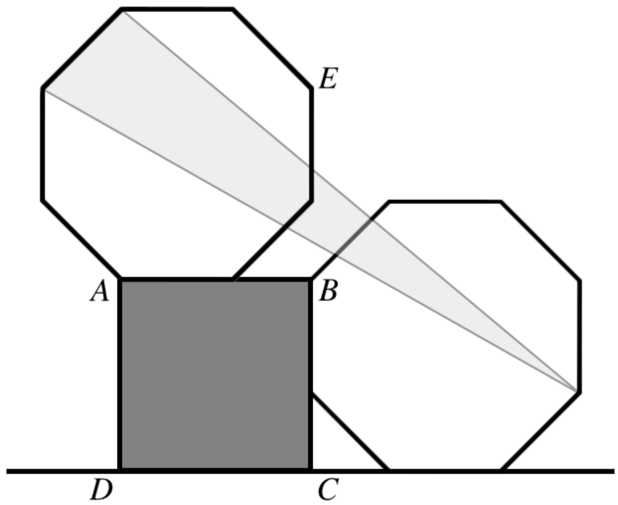
$$\text{sen}\,\theta = h \leq x.$$

Da alternativa (a) temos $x \leq \theta$, portanto

$$\text{sen}\,\theta \leq \theta,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Questão 4 (20 pontos) A figura a seguir mostra dois octógonos regulares idênticos ambos com um lado intersectando um dos lados do quadrado $ABCD$ e de forma que os pontos E, B e C são colineares. Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é 1 determine a área do triângulo hachurado na figura.



Solução:

Considere os vértices F, G, H, I do octógono superior e os vértices J e K do octógono inferior conforme indicado na figura 1 abaixo:

Além disso, conforme indicado também na figura 1, considere L o ponto sobre o lado JK de forma que o segmento LG seja perpendicular a FG.

Observe que como JK é paralelo a FG então a altura do triângulo KFG com respeito à base FG é exatamente: $\overline{LG}$. Assim, temos:

$$\text{Área}(KFG) = \frac{1}{2}\overline{FG} \cdot \overline{LG}. \tag{4}$$

Agora, novamente pelo fato que os lados JK, IH e FG são paralelos entre si e como os octógonos são idênticos, concluímos que:

$$\overline{LG} = 2 \cdot \overline{GH} + \overline{BM} \tag{5}$$

onde M é o ponto sobre o lado IH tal que BM é perpendicular a IH em M.

Denote por l o comprimento do lado dos octógonos. Como $\triangle IBH$ é retângulo e BM é altura com

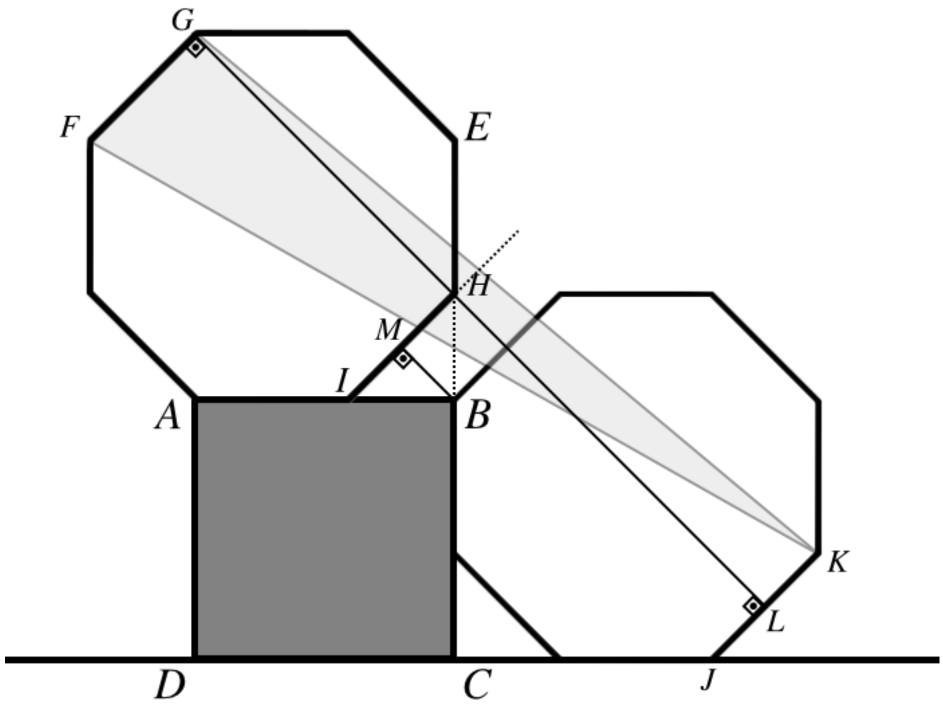


Figura 1: Vértices e outros pontos na figura

relação à hipotenusa IH, obtemos:

$$\overline{BM} = \overline{IM} = \frac{\overline{IH}}{2} = \frac{l}{2}. \tag{6}$$

Aplicando o teorema de pitágoras para o triângulo IMB obtemos:

$$\overline{IB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{IM}^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{2} \Rightarrow \overline{IB} = \frac{1}{\sqrt{2}}l.$$

Assim, o tamanho do lado do quadrado $ABCD$ é:

$$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = l + \frac{1}{\sqrt{2}}l = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}l.$$

Como a área do quadrado é igual a 1 concluímos que

$$1 = \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} l \Rightarrow l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.$$

Em particular $\overline{FG} = l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

Além disso, substituindo o valor de l para encontrar $\overline{BM}$ em (6) temos:

$$\overline{BM} = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)}.$$

Resta encontrar $\overline{GH}$. Observe que como o octógono é regular então:

$$\overline{GH} = \overline{AE}.$$

Como ABE é um triângulo retângulo então:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2.$$

Como $ABCD$ é um quadrado de área 1 então $\overline{AB} = 1$. Além disso, $\overline{EH} = \overline{AI}$ e $\overline{HB} = \overline{IB}$, logo

$$\overline{EB} = \overline{EH} + \overline{HB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \overline{AB} = 1.$$

Assim,

$$\overline{AE} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{GH} = \sqrt{2}.$$

Substituindo o valor de $\overline{BM}$ e o valor de $\overline{GH}$ em (5) obtemos:

$$\overline{LG} = 2 \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)}.$$

Agora, substituindo o valor de $\overline{FG}$ e de $\overline{LG}$ em (4) obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(KFG) &= \frac{1}{2}\overline{FG}\cdot\overline{LG} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot(\sqrt{2}+1)}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(4\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}+1)^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{8+5\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}\\
&= \frac{8\sqrt{2}+10}{4(2\sqrt{2}+3)}\\
&= \frac{4\sqrt{2}+5}{4\sqrt{2}+6}.
\end{aligned}$$

Concluímos então que:

$$\text{Área}(KFG) = \frac{4\sqrt{2}+5}{4\sqrt{2}+6}.$$

Questão 5 (20 pontos) Dizemos que um número inteiro positivo m admite **decomposição primária** se para quaisquer primos positivos distintos p e q que dividem m, existirem inteiros não nulos a e b, primos entre si, tais que

$$m = a \cdot p + b \cdot q.$$

1) Mostre que 30 admite decomposição primária.

2) Mostre que se m é um número natural ímpar divisível por pelo menos três primos distintos, então m admite decomposição primária.

Solução :

1) Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ então podemos analisar uma a uma cada escolha de p, q.

- Para $p = 2$ e $q = 3$ (ou equivalentemente para $p = 3, q = 2$) podemos escrever:

$$30 = 9 \times 2 + 4 \times 3.$$

  Neste caso $\text{mdc}(9, 4) = 1$ como queríamos.

- Para $p = 2$ e $q = 5$ (ou equivalentemente para $p = 5, q = 2$) podemos escrever:

$$30 = 5 \times 2 + 4 \times 5.$$

  Neste caso $\text{mdc}(5, 4) = 1$ como queríamos.

- Para $p = 3$ e $q = 5$ (ou equivalentemente para $p = 5, q = 3$) podemos escrever:

$$30 = 5 \times 3 + 3 \times 5.$$

  Neste caso $\text{mdc}(5, 3) = 1$ como queríamos.

Logo 30 admite decomposição primária.

2) Seja m ímpar e sejam p e q números primos distintos dividindo m então existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$m = x \cdot pq.$$

Além disso, como m é ímpar o número natural x deve ser **ímpar** e como m tem pelo menos três divisores primos distintos, x deve ser divisível por algum primo, ou seja, $x \geq 2$.

Agora, escreva

$$m = [(x-1)q] \cdot p + p \cdot q$$

e considere $a = (x-1)q$ e $b = p$. Como p não divide q, então p divide a somente se p dividir $(x-1)$, ou seja,

$$\text{mdc}(a, b) = 1 \quad \text{ou} \quad p|(x-1).$$

Se $\text{mdc}(a, b) = 1$ então não há mais nada a fazer. Se $p|(x-1)$ então, como $x \geq 2$, podemos considerar a decomposição:

$$m = [(x-2)q] \cdot p + (2p) \cdot q. \tag{7}$$

Agora, 2 não divide $(x-2)$ pois $x-2$ é ímpar (já que x é ímpar) e 2 não divide q pelo mesmo motivo. Além disso, p não divide q e p não divide $x-2$ pois, caso contrário teríamos

$$p|((x-1)-(x-2)) \Rightarrow p|1 \Rightarrow p = 1$$

caindo em contradição. Portanto

$$\text{mdc}((x-2)q, 2p) = 1$$

donde segue que (7) é uma decomposição como a exigida no enunciado.

Assim, todo número ímpar m com pelo menos três fatores primos em sua fatoração admite decomposição primária. $\square$