Simulado da Terceira Fase - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Dudu foi sorteado por uma fábrica de motos para concorrer a uma moto 0 km. Ele deve jogar dois dados honestos de 20 faces, ambos numerados de 1 a 20, e seguirá o seguinte critério:

- se a soma dos dois números for 21, ele ganha a moto;
- se ambos os dados forem números pares, ele tem o direito de jogar novamente os dados (e essa regra se aplicará novamente na nova jogada, infinitamente).

Qual a probabilidade de Dudu ganhar a moto?

Questão 2 (20 pontos) Pedro está brincando de construir sequências numéricas com os números 1, 2 e 3. A regra da brincadeira é a seguinte: i, j só pode existir na sequência nesta ordem se o elemento (i, j) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

for igual a 1. Por exemplo, as únicas sequências de dois elementos admissíveis são $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$ e $(3, 2)$. A sequência de três números $(1, 2, 3)$, por exemplo, não é admissível, pois depois de $1, 2$ não pode aparecer o 3, já que o elemento $(2, 3)$ da matriz é zero.

(a) Quantas sequências de 4 números podem ser formadas?

(b) Se uma sequência de 10 números começa com 3, qual é a probabilidade dela terminar em 2?

(c) Uma sequência admissível é dita ser n-repetitiva se ela é formada por apenas um bloco de n números que se repete. Por exemplo, a sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)$ é 2-admissível. Liste todas as sequências 2-repetitivas e 3-repetitivas que podem ser formadas.

Questão 3 (20 pontos) Faça uma representação gráfica e calcule a área das seguintes regiões do plano contidas no quadrado $[0,1] \times [0,1]$:

(a) $R_1 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x^2 + y^2 \geq 1\}$,

(b) $R_2 = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : |4x + 4y - 3| \leq |4x - 1|\}$.

Questão 4 (20 pontos) Considere ABC um triângulo equilátero de lado 4. Encontre o lado do triângulo equilátero PQR de maior área tal que PQ contém o ponto A, PR contém o ponto B e RQ contém o ponto C.

Questão 5 (20 pontos) Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e $\mathcal{A}$ o conjunto das matrizes 2×2 antissimétricas com entradas reais, ou seja,

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A ideia desta questão é mostrar que existe uma função bijetora entre os conjuntos $\mathbb{C}$ e $\mathcal{A}$ e que satisfaz certas propriedades. Considere a função $T : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ definida para cada número complexo $z = a + \mathbf{i}b$ por $T(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcule $T(z)$ para $z = 1$ e $z = \mathbf{i}$.

(b) Prove que $T(\bar{z}) = T(z)^t$, onde $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z e $T(z)^t$ é a matriz transposta de $T(z)$.

(c) Prove que T é uma função bijetora.

(d) Prove que $T(z \cdot w) = T(z)T(w)$ para quaisquer números complexos z e w.

Observação: Uma função T que satisfaz os itens (*c*) e (*d*) é chamada de *isomorfismo*.