

Simulado da Segunda Fase - Nível Beta

Questão 1 (20 pontos) Em uma classe com 22 alunos, um deles conta uma novidade para um segundo aluno; este segundo aluno conta a novidade para um terceiro, e assim por diante. Cada aluno conta a novidade para qualquer outro aluno da sala, exceto para aquele que contou a novidade a ele. Determine a probabilidade de que a novidade seja contada cinco vezes

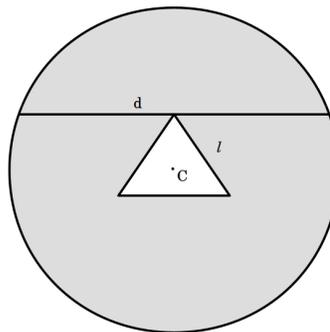
- (a) sem voltar ao primeiro aluno;
- (b) sem repetir os alunos.

Questão 2 (20 pontos) Seja f uma função real definida para todo $x \neq 0, 1$ e tal que

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x^2 - 1.$$

Encontre o valor de $f(3)$.

Questão 3 (20 pontos) Na figura abaixo temos uma circunferência de centro C , um triângulo equilátero de lado $l = 3\sqrt{3}$ e uma corda de tamanho $d = 8$ paralela à base do triângulo. Sabendo que o centro da circunferência coincide com o circuncentro do triângulo calcule a área sombreada.





Questão 4 (20 pontos) Dado um número complexo z tal que $z^6 = 1$, encontre todos os valores possíveis de $z + z^3 + z^5$.

Questão 5 (20 pontos) Seja ABC um triângulo e P um ponto no interior de ABC . A reta que passa por A e P encontra o lado BC em M , a reta que passa por B e P encontra o lado AC em N e a reta que passa por C e P encontra o lado AB em O . As áreas dos triângulos APO , APN , BPO , BPM , CPM e CPN são termos (não necessariamente consecutivos, não necessariamente nesta ordem e não necessariamente todos distintos) de uma certa PG cuja razão é um número inteiro positivo. Prove que P é baricentro de ABC .