

Simulado da Primeira Fase - Nível Beta

Questão 1 (10 pontos) Serão lançados dois dados: um dado azul de 4 faces, numeradas de 1 a 4, e um dado vermelho de 8 faces, numeradas de 1 a 8.

- (a) Determine a probabilidade de que o resultado do dado azul seja maior do que o do dado vermelho.
- (b) Determine a probabilidade de que o resto da divisão entre o resultado do dado vermelho e o do dado azul seja igual a 1.

Questão 2 (10 pontos) Considere (a_n) uma sequência que satisfaz:

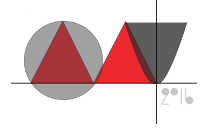
$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} - 4n.$$

Sabendo que (a_n) é uma PA, calcule o termo a_{2016} .

Questão 3 (20 pontos) Encontre todos os pares de números inteiros positivos (a, b) tais que, para algum $k \geq 2$ primo, os números a e $(ab + 2b)$ são raízes da equação

$$x^2 - 8x + k = 0.$$

Questão 4 (20 pontos) João e Maria moram na mesma rua e por coincidência num certo domingo ambos saem no mesmo instante para fazer um passeio pela rua. Passados t_0 horas João e Maria se cruzam na rua, felizmente sabemos descrever a posição de Maria e João desde o momento em que saem de casa ($t = 0$) até o instante em que se cruzam na rua (no instante t_0). No instante t entre 0 e t_0 Maria está no quilômetro $-t^2 + t + 2$ e João no quilômetro $2t$ da rua. Sabemos também que Maria esqueceu o celular em casa e voltou para pegá-lo, o que precisamos determinar é se quando João encontrou Maria ela já estava voltando para casa ou não?



Questão 5 (20 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

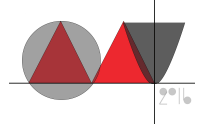
- (a) Mostre que A é uma matriz invertível e que sua matriz inversa também é uma matriz que só tem entradas inteiras.
- (b) Qual é a imagem do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por A ? Ou seja, se

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é o conjunto dos vértices do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, para cada $X \in S$ calcule $A \cdot X$ e faça um esboço da figura obtida.

- (c) Encontre um ponto $Y = (m, n)$ no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$A^2 \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Questão 6 (20 pontos) Na figura abaixo sabe-se que M é o ponto médio de BO , N é o ponto médio de CO , P é o ponto médio de DO e Q é o ponto médio de EO . Além disso, sabe-se que $\overline{AO} = 1$ e $\overline{OF} = \frac{1}{16}$. Calcule o ângulo α .

