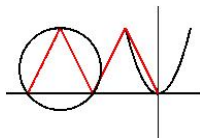


XXVI Olimpíada de Matemática da Unicamp

*Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas*



Simulado da Terceira Fase



Questão 1 Um grupo de amigos pediram três pizzas, a saber: uma especial grande, uma comum grande e uma comum pequena. Se cada um deles pagar R\$9,80, faltam R\$7,20 para pagar a conta. Se cada um deles pagar R\$11,60, recebem R\$3,60 de troco.

- (a) Quanto tem que pagar cada um dos amigos para que o dinheiro esteja certo?
- (b) Sabendo que a relação entre o preço da pizza especial grande e o preço da pizza comum grande é de $\frac{6}{4}$ e que a relação entre o preço da pizza comum grande e o preço da pizza comum pequena é de $\frac{5}{4}$, determine o valor de cada uma das pizzas.

Questão 2 Os centros de três circunferências tangentes externamente duas a duas são os vértices de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. Determine o raio de cada uma das três circunferências e a área do triângulo.

Questão 3 Uma esfera de raio r está inscrita em um cilindro circular reto com área da superfície igual a $150\pi \text{ cm}^2$.

- (a) Faça um desenho representando o cilindro e a esfera inscrita.
- (b) Determine as dimensões do cilindro.
- (c) Determine o volume da esfera.

Questão 4 Dividindo 5168 pelo número natural n , obtém-se resto 23, e dividindo 8133 pelo mesmo número natural n , obtém-se resto 13. Determine o número natural n .

Questão 5 (a) Dois números reais a e b estão numa **proporção áurea** quando

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \theta,$$

onde a constante positiva θ é denominada de **número de ouro**, ou **número áureo**. Determine o valor da constante θ .

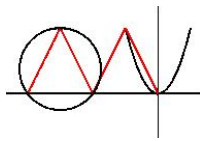
(b) Considere a seqüência de Fibonacci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots).$$

Faça uma verificação que o número áureo pode ser aproximado pela divisão do n -ésimo termo dessa seqüência de Fibonacci pelo termo anterior, isto é,

$$\theta \approx \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

observando que essa aproximação fica cada vez melhor quando tomamos n cada vez maior.



Questão 6 Foi observado em laboratório que a quantidade de uma determinada bactéria, num meio de cultura, a cada dia é diretamente proporcional ao número de bactérias do dia anterior mais duas bactérias. Por simplicidade vamos denotar por K a constante de proporcionalidade e por Q_1 o número de bactérias no primeiro dia.

- (a) Determine o número de bactérias no terceiro dia de cultura, considerando $K = 2$ e $Q_1 = 10$.
- (b) Determine uma expressão, da forma mais simplificada possível, para o número de bactérias no n -ésimo dia de cultura, em função de K , Q_1 e n .