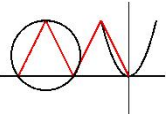


Simulado da Prova da Terceira Fase – Nível Beta

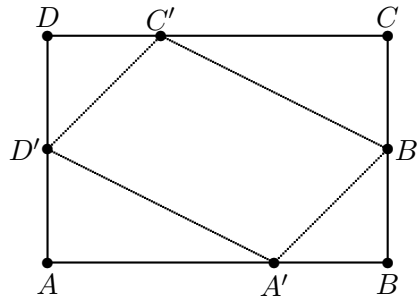


Questão 1 Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional, isto é, não pode ser escrito na forma

$$\frac{a}{b},$$

onde a e b são números inteiros positivos, com $b \neq 0$.

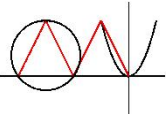
Questão 2 Na figura abaixo temos um retângulo $ABCD$ com as dimensões $\overline{AB} = 6\text{ cm}$ e $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, e um paralelogramo $A'B'C'D'$ cujos vértices C' e D' distam x centímetros do vértice D do quadrado e os vértices A' e B' distam x centímetros do vértice B do quadrado.



- Determine a área do paralelogramo em função de x .
- Determine o valor de x de maneira que o paralelogramo tenha área máxima.

Questão 3 Uma fábrica produz achocolatado em recipientes em forma de um cilindro circular reto de dois tipos: **Tipo 1**: com raio da base r centímetros e altura h centímetros. **Tipo 2**: raio da base $1,2 \times r$ e altura $1,5 \times h$. No recipiente **Tipo 1** é colocado 200 gramas de achocolatado preenchendo a embalagem até $\frac{4}{5}$ da altura h .

- Determine a relação entre os volumes das embalagens do **Tipo 1** e do **Tipo 2**, isto é, denotando por V_1 o volume da embalagem de 200 g e por V_2 o volume da embalagem de 400 g, determine a relação $\frac{V_2}{V_1}$.
- Verifique se no recipiente **Tipo 2** é possível colocar 400 gramas do achocolatado.
- Suponha que o produto com 400 gramas é vendido pelo dobro do preço do produto com 200 gramas. Considerando apenas os gastos com a produção da embalagem e com a produção do achocolatado, o produtor lucra mais vendendo dois produtos do **Tipo 1** ou um do **Tipo 2**?
- Determine o fator de escala que deve ser aplicado às medidas do pote menor de forma a obter as medidas de um pote no qual é possível colocar 600 gramas de achocolatado preenchendo até $\frac{8}{9}$ de sua altura. Determine também as medidas desse pote em função das medidas do pote menor.



Questão 4 Considere a sequência (a_n) definida de forma recursiva por:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para} \quad n \geq 2 .$$

(a) Determine o oito primeiros termos da sequência (a_n) .

(b) Mostre que o termo geral da sequência (a_n) pode ser escrito da seguinte forma:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

(c) Mostre que a_n é par se e somente se n é par.

Questão 5 Descreva como construir um triângulo ABC conhecendo-se: a medida do lado BC , a medida do lado AB e a medida da altura relativa ao lado BC .

Questão 6 Na figura abaixo temos um quadrado de lado unitário. Qual é a área do quadrado que está no centro do quadrado de maior área?

