

Simulado da Prova da Segunda Fase – Nível Beta

Questão 1

20 pontos

Considere que em uma determinada cultura de bactérias o número de bactérias cresça 50% a cada dia. Determine aproximadamente em quantos dias a cultura de bactérias tem sua população quadruplica. Caso seja necessário, utilize as seguintes aproximações:

$$\log(2) \approx 0.3 \quad , \quad \log(3) \approx 0.48 \quad e \quad \log(4) \approx 0.6 .$$

Questão 2

20 pontos

Considere o triângulo ABC cujos vértices são as imagens no plano de Argand–Gauss dos números complexos $w = 4 + 2i$, wi e $-\bar{w}$.

(a) Determine a área do triângulo ABC .

(b) Determine a medida de cada um dos lados do triângulo ABC .

Questão 3

20 pontos

Considere uma Progressão Aritmética

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

e a função quadrática $f(x) = x^2 + 1$.

Vamos definir a sequência $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ da seguinte forma:

$$b_k = f(a_k) \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots .$$

Mostre que a sequência $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ definida da seguinte forma:

$$d_k = b_{k+1} - b_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots ,$$

está numa progressão aritmética.

Mostre que podemos generalizar esse resultado para qualquer função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{para} \quad a \neq 0 .$$

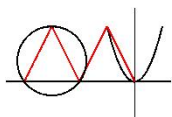
Questão 4

20 pontos

Um pedaço de barbante de comprimento L é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrada na forma de um triângulo equilátero e a outra parte dobrada na forma de uma circunferência. Determine como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das duas figuras geométricas seja

(a) a **maior** possível.

(b) a **menor** possível.



Questão 5

20 pontos

Considere $P = (x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , e uma transformação do plano que leva o ponto P no ponto $P' = (x', y')$ definida da seguinte forma:

$$x' = 4x - 3y$$

$$y' = 3x + 4y$$

e o triângulo ABC cujos vértices são os pontos

$$A = (1, 1) \quad , \quad B = (-1, 1) \quad e \quad C = (1, -1)$$

- (a) Faça a representação gráfica no plano cartesiano do triângulo ABC .
- (b) Determine a imagem do triângulo ABC pela transformação definida acima.
- (c) Faça a representação gráfica no plano cartesiano do triângulo $A'B'C'$, imagem do triângulo ABC pela transformação definida acima.
- (d) Determine a relação entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo $A'B'C'$.
- (e) O que podemos dizer sobre os feitos geométricos da transformação definida acima?

