Simulado da Prova da Segunda Fase – Nível Beta

Questão 1 *Um pedaço de barbante de comprimento L centímetros é cortado em duas partes, uma delas dobrada na forma de um triângulo equilátero e a outra parte dobrada na forma de uma circunferência. Determine como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das duas figuras geométricas*

(a) seja máxima.

(b) seja mínima.

Questão 2 ***20 pontos***

Um biólogo coloca uma porção de bactéria em um substrato apropriado para que ela cresça. Ele observa que a colônia de bactérias dobra a área de ocupação a cada hora até cobrir toda a área do substrato em 36 horas. Considerando que essas características de crescimento sejam preservadas, assim como a área total do substrato, em quanto tempo as bactérias cobririam toda a área do substrato caso fossem colocadas duas porções de bactérias no início do procedimento?

Questão 3 *Considere a função real dada por*

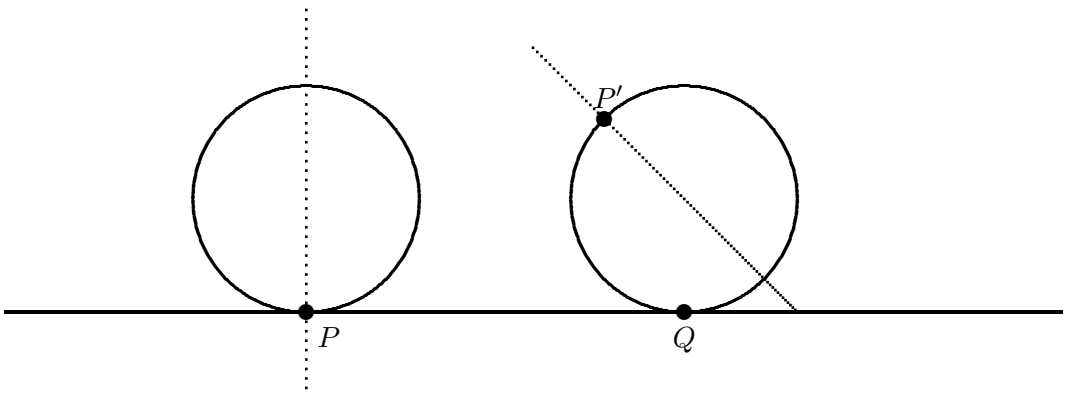
$$f(x) = \frac{ax}{bx + c}$$

para $x \in \mathbb{R}$ com $bx + c \neq 0$, onde a, b e c são constantes reais não nulas. Para quais valor(es) de x teremos $f(f(x)) = x$?

Questão 4 *Considere a situação representada na figura abaixo, onde a circunferência da esquerda, que possui raio r, girou sobre o plano horizontal, sem deslizar, até o ponto P atingir a posição P' na circunferência da direita. Sabendo que*

$$\overline{PQ} = \frac{3\pi r}{4},$$

determine a distância do ponto P' ao plano horizontal.



Questão 5 *Seja* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz real quadrada de ordem* n. *Definimos o* ***traço*** *da matriz* A, *que denotamos por* $tr(A)$, *da seguinte forma:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

(a) *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o traço da matriz $C = AB$ *e o traço da matriz* $D = BA$.

(b) *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes reais quadradas de ordem* 3. *Mostre que*

$$tr(AB) = tr(BA) .$$

Podemos afirmar que esse resultado vale para matrizes reais quadradas de ordem n?

Questão 6 *Uma seqüência de Fibonacci é uma seqüência de números reais*

$$(a_1 , a_2 , \cdots , a_n , \cdots)$$

na qual os dois primeiros termos, a_1 *e* a_2, *são escolhidos arbitrariamente e os termos seguintes são determinados como sendo a soma dos dois termos anteriores, isto é,*

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-2} + a_{n-1} \end{aligned}$$

Considere duas seqüências de Fibonacci

$$(a_1 , a_2 , \cdots , a_n , \cdots) \quad e \quad (b_1 , b_2 , \cdots , b_n , \cdots) .$$

(a) *Mostre que a soma de duas seqüências de Fibonacci é também uma seqüência de Fibonacci, isto é, a seqüência*

$$(a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , \cdots , a_n + b_n , \cdots)$$

é uma seqüência de Fibonacci.

(b) *Mostre que a multiplicação de uma seqüência de Fibonacci por um escalar real é também uma seqüência de Fibonacci, isto é, a seqüência*

$$(\lambda a_1 , \lambda a_2 , \cdots , \lambda a_n , \cdots)$$

é uma seqüência de Fibonacci, onde λ *é um escalar real.*

(c) *Determine uma seqüência de Fibonacci que tenha o oitavo termo,* a_8, *igual a* 64 *cujo primeiro termo,* a_1, *seja um número negativo..*