



Simulado da Prova da Primeira Fase – Nível Beta

Questão 1 Considere quatro números reais a, b, c e d . Sabendo que a média aritmética entre a, b e c é 3, que a média aritmética entre c e d é 5 e que a média aritmética entre a, b, c e d é 4, determine o valor de c e o valor de d .

Questão 2 Considere dois triângulos equiláteros T_1 e T_2 , e suas respectivas áreas A_1 e A_2 .

- Construa outro triângulo equilátero T_3 tal que a sua área A_3 seja a soma das áreas dos outros dois triângulos equiláteros, isto é, $A_3 = A_1 + A_2$.
- Se o comprimento do lado de T_1 é 3 cm e o comprimento do lado de T_2 é 4 cm, qual é o comprimento do lado de T_3 ?
- Se o resultado obtido no item (b) for um número natural, explique se este vai ser o caso para outros lados com comprimentos dados por números naturais.
- Considere o caso geral em que o comprimento do lado de T_1 é L_1 centímetros e o de T_2 é L_2 centímetros. Determine o comprimento do lado de T_3 .

Questão 3 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções decrescentes, e a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

isto é, h é a função composta de uma função g decrescente com uma função f decrescente. Podemos afirmar que h é uma função crescente? Justifique sua resposta.

Questão 4 Ao final da primeira fase de um campeonato de futebol, um aluno somou as pontuações dos times, obtendo 35 pontos. Considerando que cada equipe jogou com todos os demais adversários apenas uma vez, determine quantos empates aconteceram, sabendo que cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e que derrotas não pontuam.

Questão 5 Seja $Q = [q_{ij}]$ uma matriz real quadrada de ordem n . Dizemos que Q é uma **matriz ortogonal** se $Q^t Q = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n .

- Exiba uma matriz ortogonal de ordem 2.
- Mostre que $Q^t = Q^{-1}$.
- Determine uma representação para todas matrizes ortogonais de ordem 2.

Questão 6 Considere a circunferência circunscrita no quadrado de lado L centímetros, como mostra a figura abaixo. Determine, em centímetros quadrados, o aumento na área da região limitada pela circunferência e pelo quadrado, quando o lado do quadrado tem um aumento de 25%.

