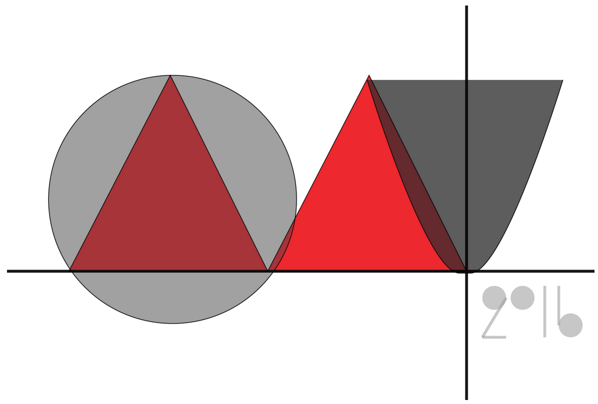
XXXII Olimpíada de Matemática da Unicamp
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Terceira Fase - Nível Beta

15 de outubro de 2016
Duração: 4 horas



Instruções

1. É **proibido destacar** as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.

2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no CADERNO DE RESPOSTAS.

3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.

4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.

5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.

6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.

7. Ao final da prova é **obrigatória a devolução do CADERNO DE RESPOSTAS**. É permitido levar para casa o CADERNO DE QUESTÕES. **Por favor, retire a etiqueta que está colada na sua carteira.**

Questão 1 (20 pontos) Um ponto será sorteado ao acaso no quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Determine a probabilidade de que o ponto obtido satisfaça a condição

(a) $x^2 + y^2 \geq 1$,

(b) $|4x + 4y - 3| \leq |4x - 1|$.

Questão 2 (20 pontos) Alice, Breno e Lucas continuam brincando de tiro ao alvo. Nestas últimas semanas eles aprenderam a atirar flechas fazendo trajetórias não retilíneas, mas parabólicas: as trajetórias das flechas são gráficos de funções da forma $y = ax^2 + bx + c$, para $0 \leq x \leq M$, onde M depende do lançamento. O alvo é um segmento de reta unindo os pontos $(7, 11)$ e $(9, 9)$. Ganha quem acertar a flecha mais próximo do ponto $(8, 10)$, que é o centro do alvo. Em caso de empate, ganhará a disputa quem acertar a flecha "na ida", ou seja, antes dela atingir o ponto mais alto de sua trajetória. Considere que as trajetórias das flechas sempre passam pela origem, que é onde estão os jogadores.

(a) Breno atira a flecha, que passa pelos pontos $(4, 15)$ e $(6, 12)$. Ele acerta o alvo? Justifique.

(b) Lucas, que era muito bom com flechas de trajetórias retas, atira uma flecha que passa pelos pontos $(3, 15)$ e $(5, 17)$. Lucas acerta o alvo? Justifique. Caso ele tenha acertado, determine a distância entre o ponto onde Lucas acerta e o centro do alvo.

(c) A flecha de Alice passa pelos pontos $(3, 15)$ e $(7, 14)$. Ela acertou o alvo? Quem se aproximou mais do centro do alvo, Alice ou Lucas?

(d) Agora é sua vez: para ganhar de Alice, qual seria a trajetória de sua flecha?

Questão 3 (20 pontos) Considere o conjunto ordenado T de todos os números naturais de 6 dígitos formados pela permutação dos dígitos $1, 2, 4, 5, 7$ e 8, ordenados por ordem crescente.

(a) Qual a posição que ocupa em T o número 142857?

(b) Note que 142857 e 857142 são números em T e $857142/142857 = 6$ é divisão exata. Encontre todos os pares (a, b), onde a e b pertencem ao conjunto T, tais que a é divisível por b.

Questão 4 (20 pontos) O pessoal que trabalha no setor de marketing da empresa A&B decidiu decorar a empresa com temas olímpicos, especificamente com os anéis olímpicos.

Figura 1: Anéis olímpicos

A parede a ser decorada mede 3m de altura por 8m de largura. Alex, o estagiário do marketing, comprou então placas quadradas coloridas, nas cores azul, amarelo, preto, verde e vermelho, cada uma delas com 3m de lado, e recortou os anéis de modo que a circunferência C, externa do anel, esteja inscrita no quadrado e a circunferência interna esteja inscrita num quadrado que está inscrito na circunferência externa (veja figura 2; o anel olímpico é a região sombreada).

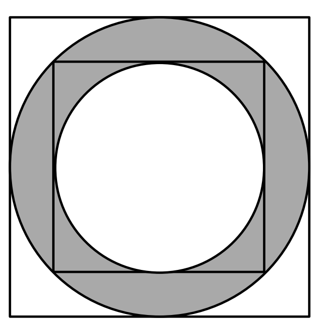


Figura 2: Molde de recorte do Alex.

(a) Considerando a disposição dos anéis olímpicos como na figura 1 anterior, Alex conseguirá decorar a parede? Justifique.

(b) Felipe resolve ajudar Alex a não perder todo o trabalho e sugere que ele utilize o material que sobrou para construir novos anéis olímpicos, ainda que menores. Estes novos anéis olímpicos seriam construídos utilizando a mesma estratégia anterior: começando com o disco de material que sobrou, constrói-se um quadrado inscrito e daí um círculo inscrito, obtendo a região sombreada mais clara, como na figura abaixo (a região sombreada mais escura foi desperdiçada). Os anéis

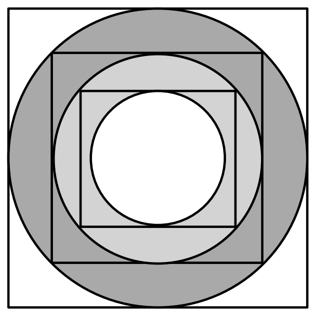


Figura 3: Sugestão de recorte de Felipe

olímpicos construídos com estes novos anéis poderão ser utilizados para decorar a parede?

(c) A falta de perícia matemática de Alex desperdiçou bastante material (a região sombreada mais escura juntamente com seu exterior). Considerando que o metro quadrado de cada placa que Alex comprou custa R$ 30,00, de quanto foi o prejuízo de Alex?

Questão 5 (20 pontos) Todo número complexo z tem a forma $z = a + \mathbf{i}b$, onde a e b são números reais e $\mathbf{i}$ é a unidade imaginária que satisfaz $\mathbf{i}^2 = -1$. Considere um outro conjunto composto por números h que se escrevem unicamente como $h = a + \mathbf{j}b$ onde a e b são números reais e $\mathbf{j}$ é unidade imaginária hiperbólica (similar a unidade imaginária $\mathbf{i}$) que satisfaz a condição $\mathbf{j}^2 = 1$. Esses números são chamados de complexos hiperbólicos. As operações de soma, multiplicação e conjugação neste conjunto são definidas, para $h = a + \mathbf{j}b$ e $w = c + \mathbf{j}d$, da seguinte forma

- $h + w = a + c + \mathbf{j}(b + d)$,
- $h \cdot w = ac + bc + \mathbf{j}(ad + bc)$,
- $\bar{h} = a - \mathbf{j}b$

Denote por $\mathbb{H}$ o conjunto dos números complexos hiperbólicos e por $\mathcal{S}$ o conjunto das matrizes 2×2 simétricas com entradas reais, ou seja,

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considere a função $T : \mathbb{H} \to \mathcal{S}$ definida para cada número complexo hiperbólico $h = a + \mathbf{j}b$ por $T(h) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcule $T(h)$ e $T(\bar{h})$, para $h = 2 + \mathbf{j}$, e depois encontre a matriz A tal que $A \cdot T(h) = T(\bar{h})$.

(b) Seja $h \in \mathbb{H}$. Diga quais são as condições que h deve satisfazer para que exista uma matriz A tal que $A \cdot T(h) = T(\bar{h})$ e exiba a matriz A.

(c) Prove que T é uma função bijetora.

(d) Prove que $T(h \cdot w) = T(h) \cdot T(w)$ para quaisquer números complexos hiperbólicos h e w.

(e) Prove que $h \cdot \bar{h} = \det T(h)$.

Obs: O equivalente da identidade de Euler $e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$ para os números complexos hiperbólicos é $e^{\mathbf{j}\theta} = \cosh(\theta) + \mathbf{j}\sinh(\theta)$.