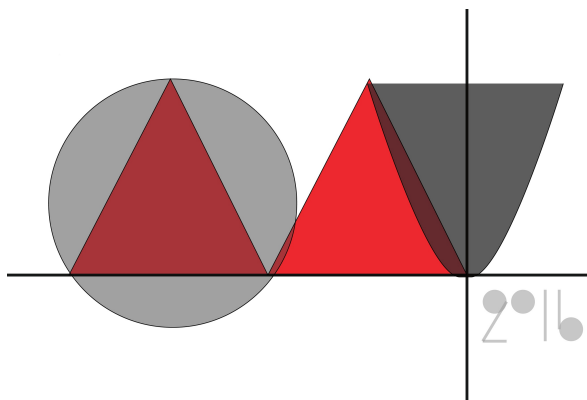


# CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Beta

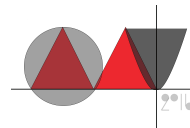
13 de agosto de 2016

Duração: 4 horas



## Instruções

1. É **proibido destacar** as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.
2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no **CADERNO DE RESPOSTAS**.
3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.
4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular**.
5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.
6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.
7. Ao final da prova é obrigatória a devolução do **CADERNO DE RESPOSTAS**. É permitido levar para casa o **CADERNO DE QUESTÕES**.



**Questão 1 (20 pontos)** Encontre o 2016º menor número real  $x$ , tal que  $x > 1$  e

$$\sin(2 \ln(x)) + 2 \cos(5 \ln(x)) \sin(3 \ln(x)) = 0.$$

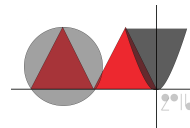
**Questão 2 (20 pontos)** Considere um grupo de 20 pessoas em uma exposição que conta com 6 salas.

- (a) Mostre que existem pelo menos quatro pessoas em uma mesma sala.
- (b) Determine a probabilidade de que, dentre as seis salas duas delas contenham exatamente 4 pessoas cada uma, e as restantes quatro salas, 3 pessoas cada.

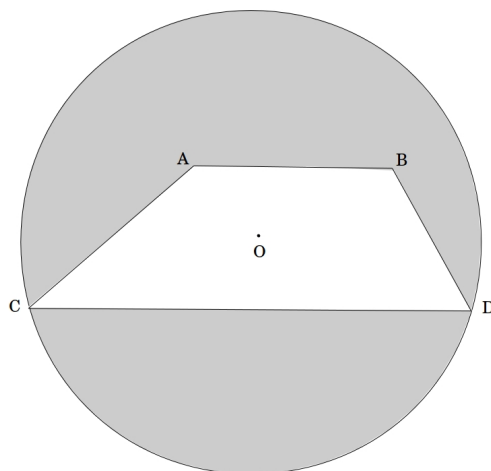
**Questão 3 (20 pontos)** Alice e Breno são duas pessoas que vivem num mundo bidimensional e estão brincando de arco e flecha. Ambos estão posicionados na origem de um sistema de coordenadas e o alvo é um segmento de reta unindo os pontos  $(7, 11)$  e  $(9, 9)$ . Ganha quem acertar a flecha mais próximo do ponto  $(8, 10)$ , que é o centro do alvo.

- (a) Na primeira rodada, a trajetória da flecha de Alice é a reta  $y = 2x$ . Ela acertou o alvo?
- (b) Na segunda rodada, a trajetória da flecha de Alice é a reta  $y = (13/10)x$  e a trajetória da flecha de Breno é a reta  $y = (11/10)x$ . Ambos acertaram o alvo, mas um se aproximou mais do centro do alvo. Quem foi o vencedor?
- (c) Lucas, que também estava na origem do sistema de coordenadas e que foi medalhista da OMU em 2015, atirou uma flecha que acertou exatamente o centro do alvo. Qual reta dá a trajetória da flecha de Lucas?

**Obs:** Se você quiser saber mais sobre o Mundo Bidimensional veja o livro “Planolândia - Um romance de muitas dimensões”, de Edwin A. Abbott.



**Questão 4 (20 pontos)** Na figura abaixo temos uma circunferência de centro  $O$  e um trapézio  $ABCD$  onde  $AB$  e  $CD$  são segmentos paralelos e  $C$  e  $D$  são pontos da circunferência. Dado que os triângulos  $ACB$  e  $OCD$  são isósceles e congruentes, que o ângulo  $C\hat{A}B$  é  $120^\circ$  e que a corda  $CD$  tem comprimento  $4\sqrt{3}$ , calcule a área da região sombreada.



**Questão 5 (20 pontos)** A equação  $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  possui 5 soluções complexas distintas, todas de módulo igual a 1.

- (a) Encontre estas soluções.
- (b) Represente estas soluções no plano complexo.
- (c) Encontre o polígono regular com o menor número de lados que tem pelo menos estes pontos como vértices e calcule sua área.