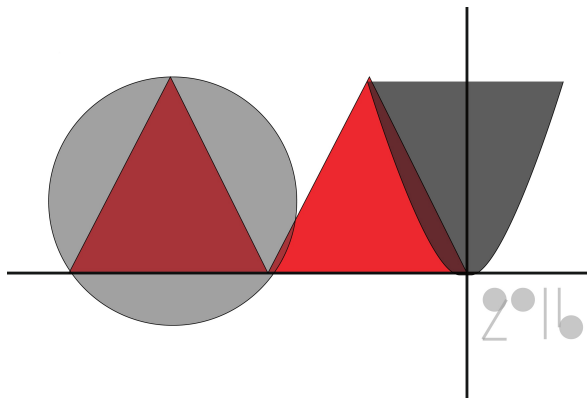


CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase - Nível Alfa

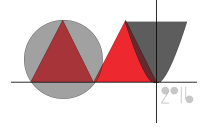
15 de outubro de 2016

Duração: 4 horas



Instruções

1. É proibido destacar as folhas do **CADERNO DE RESPOSTAS**.
2. Confira se o número de inscrição na sua carteira corresponde ao número no **CADERNO DE RESPOSTAS**.
3. A prova tem duração de 4 horas. Leia todas as questões com muita atenção. A prova pode ser resolvida à lápis ou à caneta. Justifique todas as suas respostas, apresente o raciocínio utilizado em cada passo da sua solução.
4. É permitido apenas lápis, borracha, caneta, régua e identidade em cima da carteira. As mochilas deverão ser deixadas na frente da sala, junto com os fiscais. **Desligue o celular.**
5. Qualquer dúvida ou necessidade solicite a ajuda do fiscal.
6. É proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta e de aparelhos eletrônicos e de telecomunicação.
7. Ao final da prova é **obrigatória a devolução do CADERNO DE RESPOSTAS**. É permitido levar para casa o **CADERNO DE QUESTÕES**. Por favor, retire a etiqueta que está colada na sua carteira.



Questão 1 (20 pontos) Tiago, Juliana e Rodrigo são irmãos e suas idades formam, respectivamente, uma sequência crescente de números inteiros positivos. Considere os números:

x = idade de Rodrigo somada a duas vezes a idade de Tiago;

y = soma das idades dos três e

z = a idade de Rodrigo somada a duas vezes a idade de Juliana.

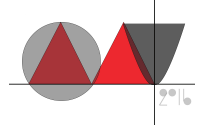
- Mostre que $y = (x + z)/2$, ou seja, x, y, z formam uma progressão aritmética.
- Considere que $y = 100$ e $z = 104$. Suponha que a diferença entre a idade de Rodrigo e a idade de Juliana é igual a um mais a diferença entre a idade de Juliana e a idade de Tiago. Quais as idades de Tiago, Juliana e Rodrigo?

Questão 2 (20 pontos) A conta de energia era composta de duas taxas: uma taxa fixa de R\$10,00 e uma taxa T que é multiplicada pela quantidade de kWh consumidos no mês. Devido à crise energética além das taxas já cobradas foi criado o sistema de bandeiras (vermelha, amarela e verde) que estabelece um valor a ser acrescido na conta dependendo do custo de geração da energia elétrica daquele mês. Esse acréscimo é proporcional ao uso e depende da bandeira, sabe-se que para bandeira vermelha o uso de 100 kWh acarreta um aumento de R\$3,00, para a bandeira amarela o uso de 100 kWh acarreta um acréscimo de R\$1,50 e na bandeira verde não há acréscimo de valor.

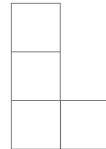
Sabendo que o consumo mensal de energia de Bruna é de 100 kWh e que no mês passado a bandeira era amarela e o valor da conta foi de R\$60,00 responda:

- Qual o valor de T ?
- Neste mês o pai da Bruna veio visitá-la e com isso o gasto de energia aumentou em 30%. Além disso, neste mês será aplicada a bandeira vermelha. O pai da Bruna gostaria de ajudá-la a pagar a conta. Ele se comprometeu a pagar a diferença do valor desta conta com o da última conta. Quanto ele vai pagar?

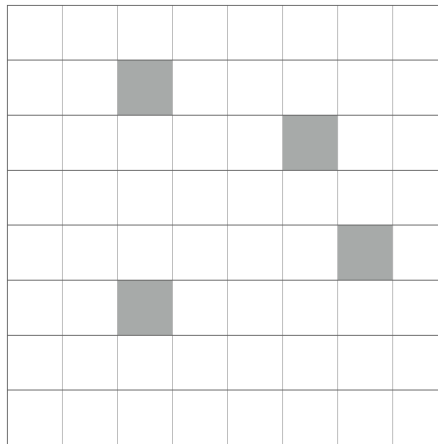
Questão 3 (20 pontos) Considerando todos os número inteiros de 1 até 1.000.000 (incluindo um milhão), qual a quantidade de números que não são quadrados perfeitos, nem cubos perfeitos, nem quartas potências perfeitas?



Questão 4 (20 pontos) Sobre uma mesa se encontram peças de madeira com o seguinte formato em L :



- Mostre uma forma de cobrir um tabuleiro 4×6 com tais peças de forma que as peças não se sobreponham.
- É possível cobrir um tabuleiro 3×10 com tais peças?
- Considere agora o tabuleiro com 60 casas obtido ao retirarmos de um tabuleiro 8×8 os quadrados hachurados na seguinte figura. É possível cobrir este tabuleiro com as peças dadas acima?



Questão 5 (20 pontos) Considere as circunferências, todas de raio 2, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e com centros p_1, \dots, p_5 respectivamente em $(-3, 4), (3/2, 4), (6, 4), (-3/4, 7/4), (15/4, 7/4)$.

- Mostre que os triângulos $p_1p_4p_2$, $p_4p_2p_5$ e $p_2p_5p_3$ são congruentes e isósceles, mas não são equiláteros.
- Calcule a área do triângulo $p_1p_4p_2$. Calcule a área do trapézio $p_1p_3p_5p_4$.
- Sejam Q_1, \dots, Q_5 quadrados inscritos nas circunferências C_1, \dots, C_5 , respectivamente e sejam D_1, \dots, D_5 circunferências inscritas em Q_1, \dots, Q_5 , respectivamente. Mostre que quaisquer duas destas circunferências não se interceptam.