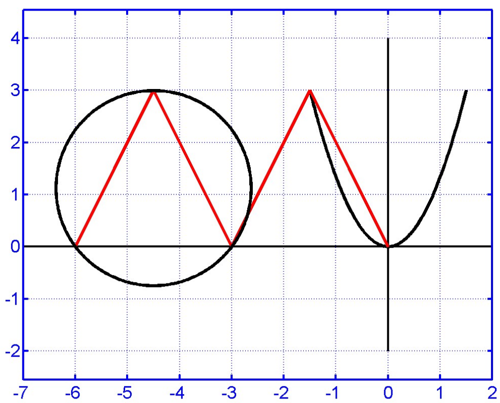


Prova da Terceira Fase – Nível Beta

20 de Outubro de 2012

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
T o t a l	

Questão 1 ***20 pontos***

Considere três dados honestos com faces numeradas de 1 *a* 6. *Joga–se um dado de cada vez.*

(a) *Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?*

(b) *Qual a probabilidade que a soma dos resultados seja maior ou igual a* 16*?*

Questão 2 ***20 pontos***

Vamos definir no conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, as operações $\oplus$ e $\otimes$ da forma:

$$x \oplus y = x + y + 4 \qquad e \qquad x \otimes y = \frac{x \times y}{3} \qquad \text{para todos} \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

onde $+$ é a operação de adição e $\times$ é a operação de multiplicação de números reais.

(a) *Mostre que existe um número real μ tal que $x \otimes \mu = \mu \otimes x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, μ é o* ***elemento neutro*** *da operação $\otimes$.*

(b) *Mostre que para todo número real $x \neq 0$ existe um número real $\widehat{x}$ tal que*

$$x \otimes \widehat{x} = \widehat{x} \otimes x = \mu,$$

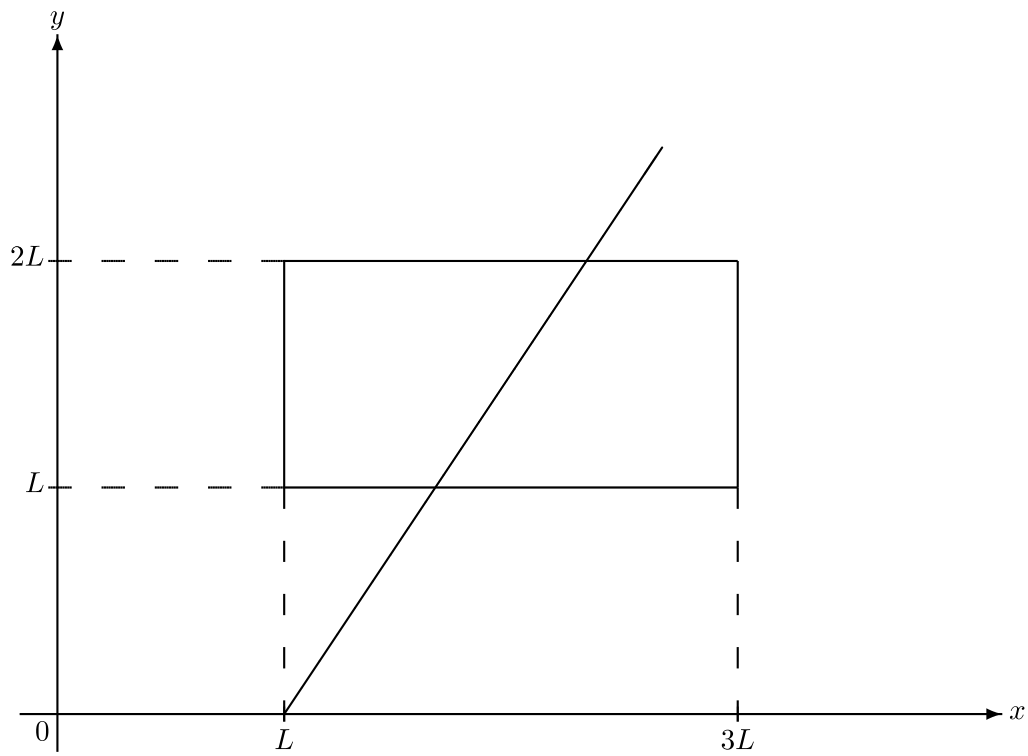
isto é, $\widehat{x}$ é o ***elemento simétrico*** *do elemento x, com relação a operação $\otimes$.*

(c) *Considerando as operações $\oplus$ e $\otimes$, determine o conjunto solução da equação*

$$x \otimes (x \oplus 3) = -2.$$

Questão 3 ***20 pontos***

Na figura abaixo temos uma reta passando pelo ponto $P = (L, 0)$ *e que divide o retângulo em dois trapézios de mesma área. Determine a equação que representa essa reta.*



Questão 4 ***20 pontos***

Num triângulo ABC, o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 30^o e o ângulo $A\widehat{C}B$ mede 60^o. Seja E um ponto sobre o lado BC tal que $\overline{AC} = \overline{CE}$.

(a) *Mostre que o triângulo ABE é isósceles e que o triângulo ACE é equilátero.*

(b) *Determine a área do triângulo ABC em função do comprimento do segmento AE.*

Questão 5 ***20 pontos***

(a) Determine os valores do parâmetro λ *de modo que o sistema linear*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

admita soluções não–nulas, isto é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(b) Escolha um parâmetro λ *encontrado no item (a), e determine o conjunto solução do sistema linear acima.*

Questão 6 ***20 pontos***

Seja $Q = [q_{ij}]$ *uma matriz real quadrada de ordem* n*. Dizemos que* Q *é uma* ***matriz ortogonal*** *se* $Q^t Q = I_n$*, onde* I_n *é a matriz identidade de ordem* n*.*

(a) *Mostre que* $Q^t = Q^{-1}$.

(b) *Mostre que* $det(Q) = \pm 1$.

(c) *Determine como podemos representar as matrizes ortogonais de ordem* 2.

(d) *Exiba uma matriz ortogonal de ordem* 2 *e calcule o seu determinante.*