Prova da Segunda Fase – Nível Beta

23 de Agosto de 2014

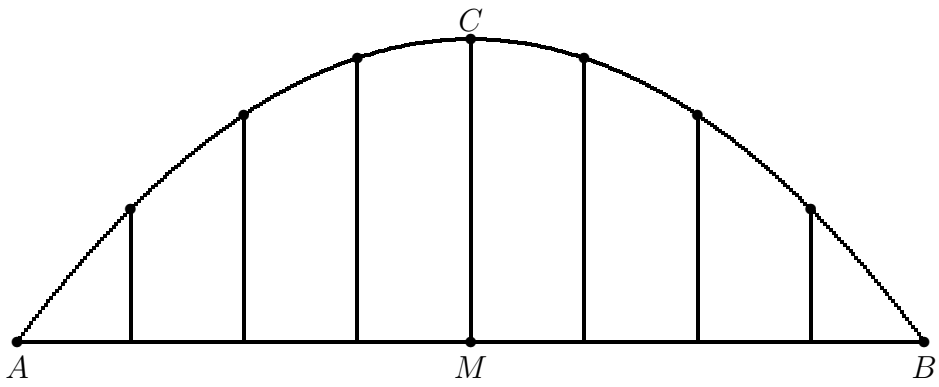
Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
T o t a l	

Questão 1 ***20 pontos***

Um construtor deseja confeccionar o telhado de um galpão na forma de uma parabola apoiado na viga horizontal AB por colunas verticais com espaçamento de um metro e meio entre elas, como ilustra a figura abaixo.

Sabendo que a viga AB mede 12 metros de comprimento, que M é o ponto médio da viga AB e que a coluna vertical MC mede quatro metros, determine as medidas das outras colunas de modo que o telhado apoiado nelas tenha o formato parabólico como deseja o construtor.



Questão 2 ***20 pontos***

Definição 1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos* ***potenciação*** *para expoentes naturais da seguinte forma:*

$$A^0 = I_n \quad , \quad A^1 = A \quad , \quad A^2 = AA \qquad e \qquad A^{k+1} = AA^k \, ,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Definição 2 *Seja R uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que R é uma matriz* ***auto–reflexiva*** *se $R^2 = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.*

Definição 3 *Seja P uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que P é uma matriz* ***idempotente*** *se $P^2 = P$.*

(a) *Seja R uma matriz auto–reflexiva de ordem n. Determine os valores dos parâmetros α e β de modo que a matriz $P = \alpha R + \beta I_n$ seja uma matriz idempotente.*

(b) *Mostre que a matriz R definida da forma:*

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

é auto–reflexiva e escreva explicitamente a matriz idempotente $P = \alpha R + \beta I_2$.

Questão 3 ***20 pontos***

Definição 4 *Denomina–se* ***Progressão Harmônica*** *uma sequência de números reais não nulos tais que os inversos de seus termos formam uma Progressão Aritmética.*

Definição 5 *Denomina–se* ***Média Harmônica*** *entre números reais não nulos como sendo o inverso da média aritmética do inverso desses números reais. Por exemplo, a Média Harmônica entre os números reais não nulos* a, b, c *é dada por:*

$$M_h = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3}\right)^{-1} \iff M_h = \frac{3abc}{bc + ac + ab},$$

onde M_h *denota a média harmônica.*

(a) *Se os três primeiros termos de uma progressão harmônica são* $12, 6, 4$, *determine o seu oitavo termo.*

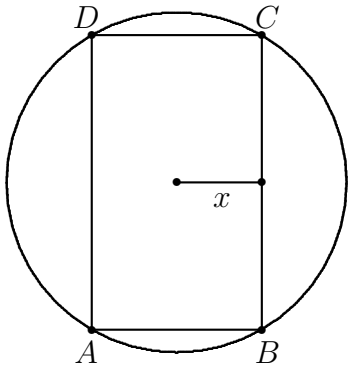
(b) *Escreva a expressão para o termo geral de uma progressão harmônica, cuja progressão aritmética formada pelos inversos de seus termos tem* a_1 *como primeiro termo e* r *como a razão dessa* PA.

(c) *Considere que os números reais* $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ *formam uma progressão harmônica. Mostre que cada termo da progressão harmônica é a média harmônica de seus vizinhos imediatos, isto é, o termo* h_n *é a média harmônica entre os termos* h_{n-1} *e* h_{n+1}.

(d) *Uma família de professores de matemática em viagem de férias realizou o trajeto entre as cidades de Campinas e Bebedouro, desenvolvendo uma velocidade média de* 90 *quilômetros por hora na ida, e uma velocidade média de* 110 *quilômetros por hora no retorno. Determine a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta.*

Questão 4 ***20 pontos***

(a) Considere um retângulo $ABCD$ inscrito numa circunferência cujo raio mede quatro centímetros, como ilustra a figura abaixo.



Determine a área do retângulo $ABCD$ em termos de $x = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

(b) Considere um cilindro circular reto inscrito numa esfera de raio igual a quatro centímetros. Seja r a medida, em centímetros, do raio da base do cilindro.

1. *Determine o volume do cilindro em função de r.*
2. *Determine quantos cilindros circulares retos de volume igual a $\sqrt{60}\pi$ centímetros cúbicos podem ser inscritos numa esfera de raio igual a quatro centímetros.*

Questão 5 ***20 pontos***

Definição 6 *Definimos a* ***Distância*** *entre os pontos* $P = (x_1\,,\,y_1)$ *e* $Q = (x_2\,,\,y_2)$*, que vamos denotar por* $d(P,Q)$*, no plano numérico da seguinte forma:*

$$d(P,Q) \;=\; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\;.$$

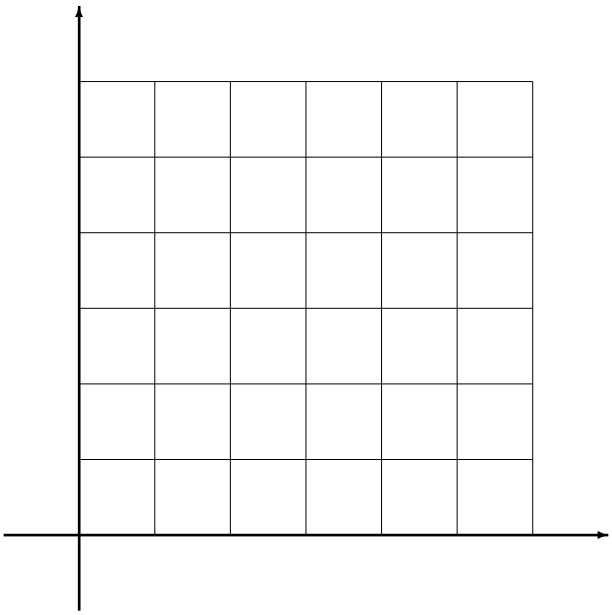
(a) Dados os pontos $P = (2,4)$ *e* $B = (4\,,\,b)$*, determine o(s) valor(es) do parâmetro* b *de modo que* $d(P,B) = \sqrt{5}$*.*

(b) Dado o ponto $P = (2,4)$ *e a reta* r *representada pela equação*

$$2x + y = 4\,,$$

determine o ponto Q *pertencente a reta* r *que está mais próximo do ponto* P*.*

Utilize o sistema de coordenadas abaixo para fazer a representação gráfica dos problemas descritos acima.



R a s c u n h o