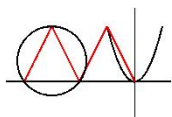


Prova da Segunda Fase – Nível Beta
15 de Agosto de 2015

Código de Identificação:

<i>Questões</i>	<i>Pontos</i>
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
<i>T o t a l</i>	

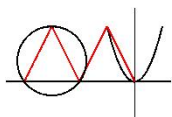


Questão 1

20 pontos

Vamos denotar por $B(n)$ o número de bactérias no n -ésimo dia em uma determinada cultura, e que no início da cultura, isto é, no dia $n = 0$, tenhamos $B(0) = 80$. Considere que nessa cultura de bactérias o número de bactérias cresça 100% a cada dia e que a partir do segundo dia, isto é, a partir do dia $n = 2$, essa população apresente uma mortalidade de 75% do número total de bactérias de dois dias anteriores.

- (a) Determine o número de bactérias no quarto dia, isto é, no dia $n = 4$.
- (b) Determine a Equação de Recorrência que representa o problema descrito, indicando as condições iniciais adequadas.
- (c) Determine a solução da Equação de Recorrência.



Questão 2

20 pontos

Considere a matriz A de ordem 2×2 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e a transformação do plano numérico, definida pela matriz A , que leva o ponto $P = (a, b)$ no ponto $Q = (c, d)$ definida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, dado o ponto $P = (3, 2)$ a sua imagem pela transformação definida pela matriz A é o ponto $Q = (c, d)$ obtido da forma:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o ponto $P = (3, 2)$ é levado pela transformação no ponto $Q = (4, 1)$.

- (a) Determine o ponto $P = (a, b)$ cuja imagem pela transformação definida pela matriz A é o ponto $Q = (-2, 3)$.
- (b) Determine a imagem do triângulo ABC , pela transformação definida pela matriz A , cujos vértices são dados pelos pontos

$$A = (-2, 0) \quad , \quad B = (1, 0) \quad e \quad C = (1, 3).$$

- (c) Faça a representação no plano numérico do triângulo ABC e de sua imagem pela transformação definida pela matriz A .
- (d) Determine a imagem da reta r , dada pela equação $y = 3x - 2$, pela transformação definida pela matriz A .
- (e) Faça os gráficos no plano numérico da reta r e de sua imagem pela transformação definida pela matriz A .

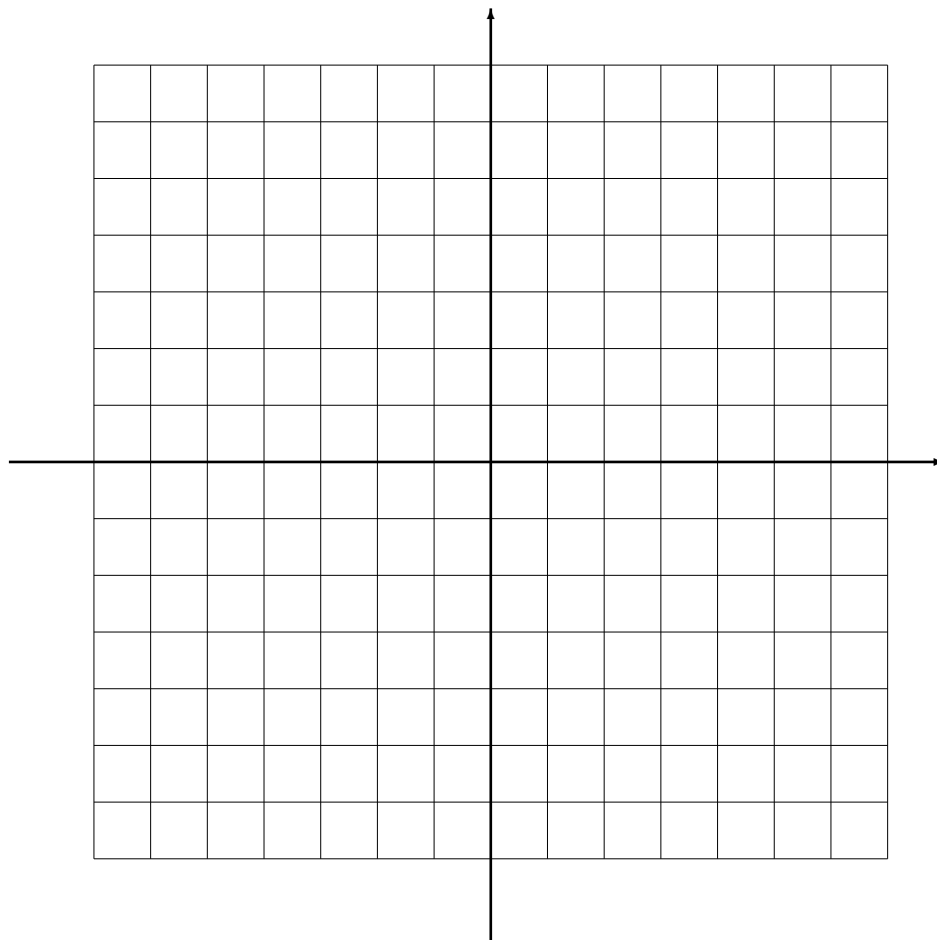
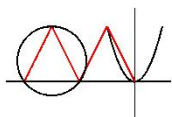
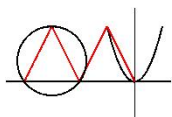


Figura 1: Gráficos da Questão 2.



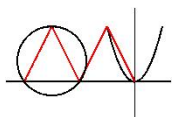
Questão 3

20 pontos

Considere duas Progressões Aritméticas

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad e \quad (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots).$$

Mostre que os pares ordenados (a_k, b_k) , para $k = 1, 2, \dots, n, \dots$, pertencem ao gráfico de uma mesma reta contida no plano numérico.



Questão 4

20 pontos

- (a) Determine o lugar geométrico no plano de Argand–Gauss dos números complexos z que satisfazem a seguinte equação $|z|^2 + 1 = |4z + zi|^2$.
- (b) Mostre que as imagens geométricas dos números complexos 0 , z e zi no plano de Argand–Gauss são os vértices de um triângulo retângulo e isósceles.

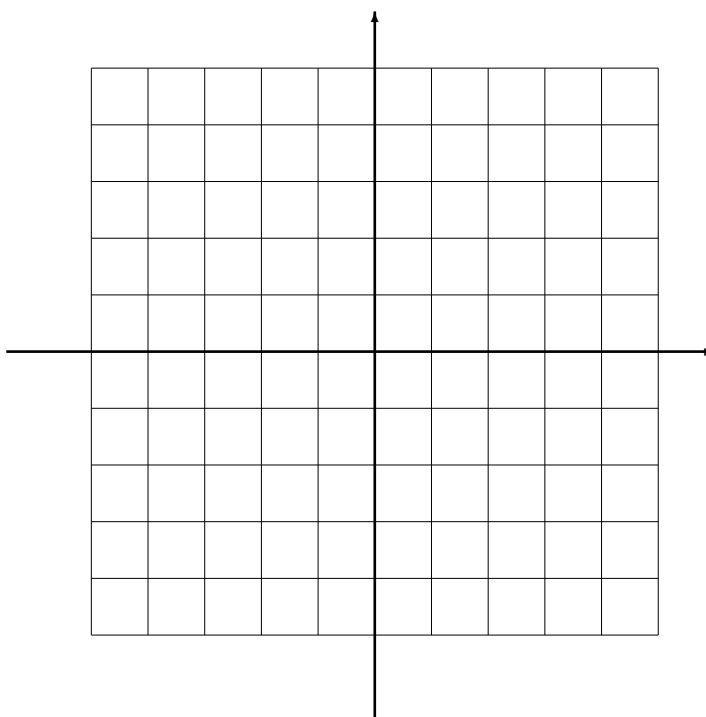
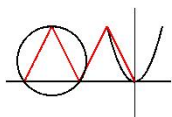


Figura 2: Gráficos da Questão 4.



Questão 5

20 pontos

Considere um setor circular de perímetro fixo P , como ilustra a figura abaixo. Determine o valor do raio e o comprimento do arco de modo que a área do setor circular seja máxima. Determine o ângulo interno em radianos, para o setor circular de área máxima.

