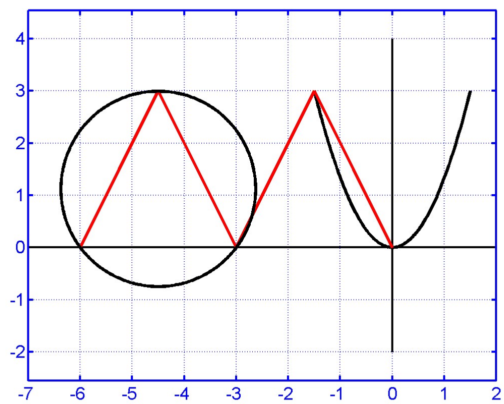


Prova da Segunda Fase – Nível Beta

04 de Agosto de 2012

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
T o t a l	

Questão 1 ***20 pontos***

Dentre todos os losangos cuja soma das medidas das diagonais é igual a L centímetros, determine:

(a) *o losango de maior área possível e a medida de sua área.*

(b) *o perímetro do losango de área máxima.*

Questão 2 ***20 pontos***

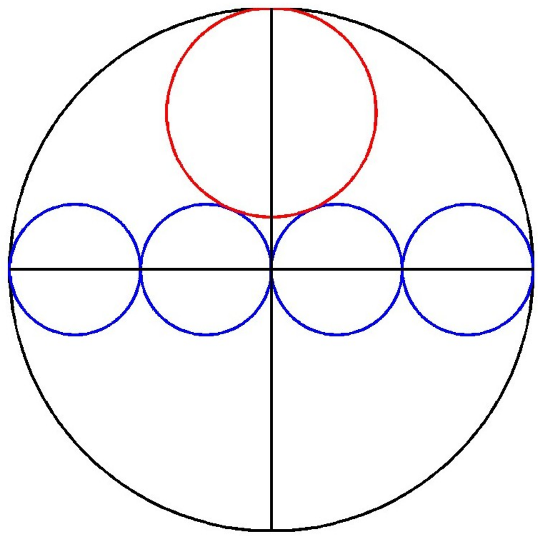
Considere a sequência numérica (A_n) *com a seguinte propriedade:*

$$A_k + A_{k+1} + A_{k+2} = 15 \qquad \textit{para} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots ,$$

onde $A_1 = 4$ *e* $A_9 = 7$*. Determine os doze primeiros termos dessa sequência.*

Questão 3 ***20 pontos***

Na ilustração da figura abaixo, temos quatro circunferências com o mesmo raio e cujos centros estão em um mesmo diâmetro da circunferência maior. Considerando que o diâmetro da circunferência maior mede $20\,cm$*, determine o raio da circunferência que tangencia as duas circunferências de mesmo raio e a circunferência maior.*



Questão 4 ***20 pontos***

Considere a função real dada por

$$f(x) \;=\; \frac{ax}{bx\,+\,c}$$

para $x \in \mathbb{R}$ *com* $bx + c \neq 0$, *onde* a, b *e* c *são constantes reais não nulas. É possível fixar as constantes* a, b *e* c *de forma que* $f(f(x)) = x$ *para todo* $x \neq -\dfrac{c}{b}$*?*

Questão 5 ***20 pontos***

O pagamento de um certo marceneiro aumenta de acordo com o número de dias em que ele trabalha. No primeiro dia ele recebeu 50 *reais. no segundo dia ele recebeu o que tinha ganho no primeiro dia mais* 5 *reais. No terceiro dia ele recebeu o que tinha recebido no segundo dia mais* 10 *reais. No quarto dia ele recebeu o que tinha recebido no terceiro dia mais* 15 *reais, e assim sucessivamente.*

(a) *Quanto o marceneiro irá receber no quinto dia de trabalho?*

(b) *Quanto o marceneiro irá receber no* N*–ésimo dia de trabalho?*

Questão 6 ***20 pontos***

Seja $A = [a_{ij}]$ *uma matriz real quadrada de ordem* n. *Definimos o* ***traço*** *da matriz* A, *que denotamos por* $tr(A)$, *da seguinte forma:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

(a) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine o traço da matriz $C = A + 3B$.

(b) Sejam $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *matrizes reais quadradas de ordem* n, *e* α *um número real. Mostre que*

$$tr(A + \alpha B) = tr(A) + \alpha tr(B) .$$