Questão 1 (20 pontos) Encontre o 2016º menor número real x, tal que $x > 1$ e

$$\operatorname{sen}(2\ln(x)) + 2\cos(5\ln(x))\operatorname{sen}(3\ln(x)) = 0.$$

Solução: Vamos usar a seguinte identidade trigonometrica

$$2\cos(a)\operatorname{sen}(b) = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b),$$

com $a = 5\ln(x)$ e $b = 3\ln(x)$. Portanto,

$$0 = \operatorname{sen}(2\ln(x)) + 2\cos(5\ln(x))\operatorname{sen}(3\ln(x)) = \operatorname{sen}(2\ln(x)) + \operatorname{sen}(8\ln(x)) - \operatorname{sen}(2\ln(x)) = \operatorname{sen}(8\ln(x)).$$

Como $\operatorname{sen}(8\ln(x)) = 0$ se e somente se $8\ln(x) = k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que o 2016° menor x que satisfaz a identidade e tal que $x > 1$ é $x = e^{252\pi}$.

Questão 2 (20 pontos) Considere um grupo de 20 pessoas em uma exposição que conta com 6 salas.

(a) Mostre que existem pelo menos quatro pessoas em uma mesma sala.

(b) Determine a probabilidade de que, dentre as seis salas duas delas contenham exatamente 4 pessoas cada uma, e as restantes quatro salas, 3 pessoas cada.

Solução: Dado um grupo de 20 pessoas e 6 salas, observe que elas poderiam estar todas na mesma sala, ou elas poderiam estar espalhadas nas salas de diversas formas.

1. Suponha por absurdo que existe uma distribuição onde cada sala ficou com três ou menos pessoas. Assim o máximo de pessoas deveria ser menor ou igual a $3 \times 6 = 18$. O que é um absurdo, pois haviam 20 pessoas. Logo existe pelo menos uma sala com quatro ou mais pessoas.

   Outra solução poderia ser usando o Princípio da Casa dos Pombos.

2. Para determinar a probabilidade requerida, observe que precisamos apenas contar o total de maneiras em que as pessoas podem estar distribuídas nas salas, pois não temos nenhuma informação adicional que favoreça uma sala em relação a outra.

   Como são 20 pessoas e 6 salas, podemos representar as pessoas e as salas como uma sequência de símbolos: $\circ$ ou $|$, onde $\circ$ representa cada pessoa, e $|$ representa as paredes das salas (imaginando que colocamos as salas em linha). Assim, uma possível distribuição das pessoas nas salas é:

   $$|\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ|||||\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ|,$$

   que indica que há 10 pessoas na sala 1, 10 pessoas na sala 6, e nenhuma nas salas 2, 3, 4 ou 5.

   Fixando a primeira e a última barras (para indicar que nenhuma das 20 pessoas está fora da exposição), o total de distribuições possíveis é igual ao total de posicionamentos diferentes das 5 barras restantes entre as 20 bolinhas, ou seja, entre 25 posições disponíveis,

   $$\binom{25}{5} = \frac{25!}{20!\,5!} = 53130\,.$$

Destes, o problema pede o evento em que há exatamente duas salas com 4 pessoas e quatro salas, com 3 pessoas. Uma das possibilidades é a distribuição:

$$|\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ|\circ\circ\circ|\circ\circ\circ|\circ\circ\circ|,$$

que indica que há 4 pessoas na sala 1, 4 pessoas na sala 2, e 3 pessoas em cada uma das salas restantes.

Para as demais possibilidades, basta indicar quais são as duas salas com 4 pessoas, isto é, temos um total de

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

possibilidades com essa distribuição.

Portanto, a probabilidade pedida é $15/53130 \approx 1$ em 3400.

Obs: Nesta resolução, estamos supondo que o importante é o total de pessoas na sala e não quais são essas pessoas (no modelo, estamos supondo que as bolinhas são indistinguíveis). Se houver alguma ambiguidade para o leitor, que possa levá-lo a crer que a identidade das pessoas é importante na contagem, então o enunciado deve ser alterado.

Questão 3 (20 pontos) Alice e Breno são duas pessoas que vivem num mundo bidimensional e estão brincando de arco e flecha. Ambos estão posicionados na origem de um sistema de coordenadas e o alvo é um segmento de reta unindo os pontos $(7, 11)$ e $(9, 9)$. Ganha quem acertar a flecha mais próximo do ponto $(8, 10)$, que é o centro do alvo.

(a) Na primeira rodada, a trajetória da flecha de Alice é a reta $y = 2x$. Ela acertou o alvo?

(b) Na segunda rodada, a trajetória da flecha de Alice é a reta $y = (13/10)x$ e a trajetória da flecha de Breno é a reta $y = (11/10)x$. Ambos acertaram o alvo, mas um se aproximou mais do centro do alvo. Quem foi o vencedor?

(c) Carolina, que também estava na origem do sistema de coordenadas e que foi medalhista da OMU em 2015, atirou uma flecha que acertou exatamente o centro do alvo. Qual reta dá a trajetória da flecha de Carolina?

Solução:

(a) A equação da reta que liga os pontos $(7, 11)$ e $(9, 9)$ é $y = -x + 18$. Para saber se Alice acertou o alvo vamos encontrar o ponto de interseção das retas $y = -x+18$ e $y = 2x$. O ponto de interseção é $(6, 12)$ que não pertence ao alvo. Portanto, Alice erra o alvo.

(b) Alice acerta o alvo no ponto de interseção das retas $y = (13/10)x$ e $y = -x + 18$ que é $A = (180/23, -180/23 + 18)$. Breno acerta o alvo no ponto de interseção das retas $y = (11/10)x$ e $y = -x + 18$ que é $B = (180/21, -180/21 + 18)$ é a reta. Para saber quem se aproximou mais do centro do alvo basta comparar a distância entre o ponto A e o centro do alvo e o entre o ponto B e o centro do alvo. A distância d_A entre A e o centro do alvo é

$$d_A = \sqrt{\left(\frac{180}{23} - 8\right)^2 + \left(-\frac{180}{23} + 18 - 10\right)^2} = \sqrt{2}\left|\left(\frac{180}{23} - 8\right)\right| = \sqrt{2}\frac{4}{23}.$$

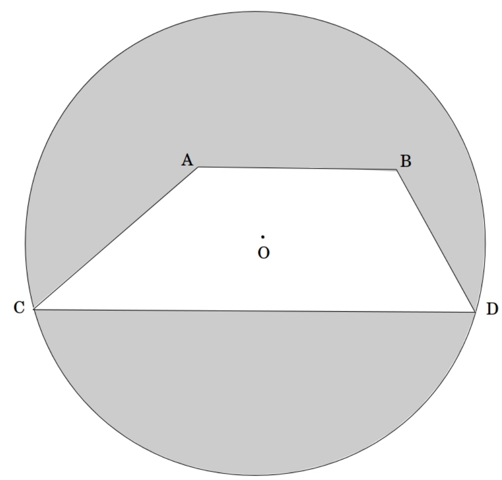
A distância d_B entre B e o centro do alvo é

$$d_B = \sqrt{\left(\frac{180}{21} - 8\right)^2 + \left(-\frac{180}{21} + 18 - 10\right)^2} = \sqrt{2}\left|\left(\frac{180}{21} - 8\right)\right| = \sqrt{2}\frac{12}{21}.$$

Logo, $d_A < d_B$ e portanto a Alice venceu.

(c) A reta reta que dá a trajetória da flecha de Carolina é o segmento que liga os pontos $(0, 0)$ e $(8, 10)$. A equação desta reta é $y = 10/8x$.

Questão 4 (20 pontos) Na figura abaixo temos uma circunferência de centro O e um trapézio $ABCD$ onde AB e CD são segmentos paralelos e C e D são pontos da circunferência. Dado que os triângulos ACB e OCD são isóceles e congruentes, que o ângulo $C\hat{A}B$ é 120° , que o ponto O pertence ao segmento CB e que a corda CD tem comprimento $4\sqrt{3}$, calcule a área da região sombreada.



Solução: É fácil ver que a área sombreada é igual a área da circunferência menos a área do trapézio. Para calcular a área da circunferência precisamos primeiro calcular seu raio.

Denotemos por R o valor do raio. Note que $CO = OD = R$. Como os triângulos ACB e OCD são isóceles e congruentes concluímos que o ângulo $C\hat{O}D$ é 120°e os ângulos $O\hat{C}D$ e $O\hat{D}C$ 30°. Além disso, também pela congruência, concluimos que $AC = AB = R$. Trace a altura do triângulo COD a partir do vértice O e denote por P o ponto em que a altura intercepta o segmento CD. Analisando o triângulo COP obtemos

$$\cos(30°) = \frac{2\sqrt{3}}{CO},$$

donde segue que $CO = 4$. Logo, $R = 4$. Consequentemente a área da circunferência A_C é dada por:$A_C = \pi R^2 = 16\pi$.

Para calcular a área do trapézio vamos calcular sua altura. Denote por Q o ponto no lado CD de forma que AQ é perpendicular a CD. Como AB é paralelo a CD temos que $\angle AQC = \angle QAB = 90°$. Assim,

$$\angle CAQ = \angle CAB - \angle QAB = 120 - 90 = 30° \Rightarrow \angle DCA = 60°.$$

Consequentemente, no triângulo ACQ temos

$$\text{sen}(60°) = \frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{OC} = \frac{AQ}{4}$$

$$\Rightarrow AQ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Então a área do trapézio A_T é dada por

$$A_T = \frac{(CD + AB)AQ}{2} = \frac{(4\sqrt{3} + 4)2\sqrt{3}}{2} = 12 + 4\sqrt{3}.$$

Finalmente a área pedida é dada por: $A_C - A_T = 16\pi - 12 - 4\sqrt{3}$.

Questão 5 (20 pontos) A equação $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ possui 5 soluções complexas distintas, todas de módulo igual a 1.

(a) Encontre estas soluções.

(b) Represente estas soluções no plano complexo.

(c) Encontre o polígono regular com o menor número de lados que tem pelo menos estes pontos como vértices e cálcule sua área.

Solução:

(a) Vamos usar a seguinte propriedade:

Seja $z \neq 1$. É fácil verificar que $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \ldots + z^{n-1})$ para todo natural n. No caso particular, temos que $z^6 - 1 = (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. Logo, as soluções de $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ são as raízes sextas da unidade (por definição, soluções de $z^6 - 1 = 0$), exceto a raiz $z = 1$.

Considerando a representação $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, como $r = 1$, devemos ter $\theta = \frac{2k\pi}{6}$, com $k = 01, 2, 3, 4, 5$ e obtemos que as raízes sextas da unidade são:

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, z_4 = -1, z_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, z_6 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as 5 soluções complexas distintas da equação são:

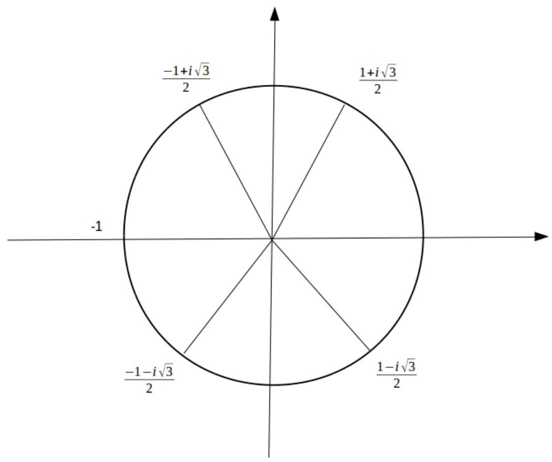
$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Solução alternativa: Considerando que

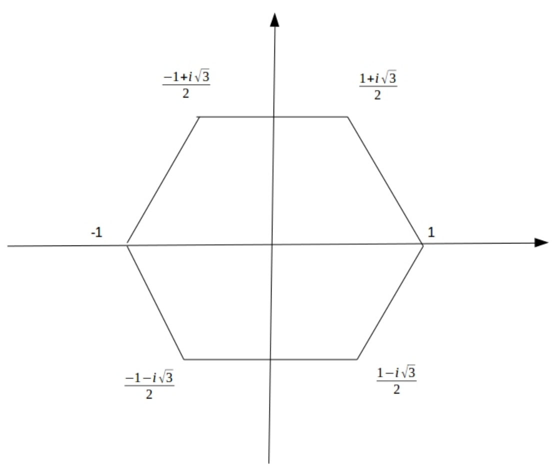
$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^3(z^2 + z + 1) + (z^2 + z + 1) = (z^3 + 1)(z^2 + z + 1),$$

encontra-se as três soluções de $(z^3 + 1) = 0$ (que são $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -1$ e $z_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$) e as duas soluções de $z^2 + z + 1 = 0$ (que são $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $z_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$).

(b) Representação das soluções no plano complexo:



(c) Observe que as soluções encontradas não formam um polígono regular, mas correspondem a 5 dos seis vértices de um hexágono regular, com com vértices: $1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Observe que o vértice 1 é raíz de z^6-1, a única raíz que não é solução de $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.



A área será 6 vezes a área do triângulo de vértices $1, 0, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Note que este triângulo é equilátero e seus lados tem comprimento 1. Logo a área do triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e, consequentemente, a área do hexágono é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.