Gabarito da Prova da Primeira Fase - Nível Beta

Questão 1 (10 pontos) Determine todos os números inteiros positivos n que satisfazem a condição

$$\frac{n^2 - 7n}{n+1} \in \mathbb{Z}.$$

Solução: Veja que

$$\frac{n^2 - 7n}{n+1} = \frac{n(n+1) - 8n}{n+1}.$$

Então $n+1$ divide $8n$. Como n é inteiro positivo e $(n+1)$ não tem nenhum fator comum com n devemos ter que $(n+1)$ divide 8. Como n é positivo temos que $n+1 \in \{2, 4, 8\}$ e consequentemente $n \in \{1, 3, 7\}$.

Questão 2 (10 pontos) Considere o experimento de lançar uma moeda e: (a) se sair cara, lançar um dado de 6 faces, numeradas de 1 a 6; ou (b) se sair coroa, lançar um dado de 20 faces, numeradas de 1 a 20. Suponha que o experimento é realizado, obtendo face 3 no lançamento do dado. Se você tivesse que dar seu palpite sobre qual dado foi lançado, qual resposta você escolheria: o dado de 6 faces, o dado de 20 faces, ou para você seria indiferente qualquer um dos dois? Justifique sua resposta calculando a probabilidade de cada dado.

Solução: Temos que a probabilidade de obter cara é $1/2$ e a probabilidade de obter coroa é $1/2$. Se o dado de 6 faces for lançado, cada uma das seis faces tem mesma probabilidade de ser obtida; se o dado de 20 faces for lançado, cada uma das 20 faces tem mesma probabilidade de ser obtida. Denotemos o resultado "cara" por C, e "coroa" por K. Como a probabilidade de obter cara é $1/2$, então a probabilidade de obter o evento $\{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$ é $1/2$. Como a probabilidade destes resultados é a mesma e sua soma é igual a $1/2$, temos que a probabilidade de cada um destes resultados é $1/12$. Em particular, a probabilidade de $C3$ é $1/12$. Do mesmo modo, no caso de coroa, a probabilidade de obter $\{K1, K2, K3, K4, \ldots, K20\}$ é $1/2$, tendo cada um destes resultados a mesma probabilidade de ser obtido. Portanto, a probabilidade de cada um deles é $1/40$. Em particular, a probabilidade de $K3$ é $1/40$. Assim, se sabemos que a face 3 foi obtida, temos que este resultado é mais provável de ter sido obtido com o dado de 6 faces, na proporção de 1/12 para 1/40, ou, equivalentemente, de 40 para 12 (ou de 10 para 3). Em outras palavras, se foi obtida face 3, então a probabilidade de ter sido com o dado de 6 faces é 10/13, e a de ter sido com o dado de 20 faces é 3/13.

Questão 3 (20 pontos) Seja A uma matriz tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre A.

(b) Exiba uma matriz B, diferente de A, tal que $B^2 = A^2$.

Solução:

(a) Escreva

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Note que $A^4 = AA^3$ e portanto

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+6b & 3a-3b \\ 3c+6d & 3c-3d \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, obtemos que

$$3a + 6b = 9$$
$$3a - 3b = 0 \Rightarrow a = b$$
$$3c + 6d = 0 \Rightarrow c = -2d$$
$$3c - 3d = 9$$

Substituindo $a = b$ na primeira equação obtemos que $a = 1$. Logo, $a = b = 1$. Substituindo $c = -2d$ na última equação obtemos que $d = -1$. Portanto, $d = -1$ e $c = 2$. Sendo assim, concluímos que

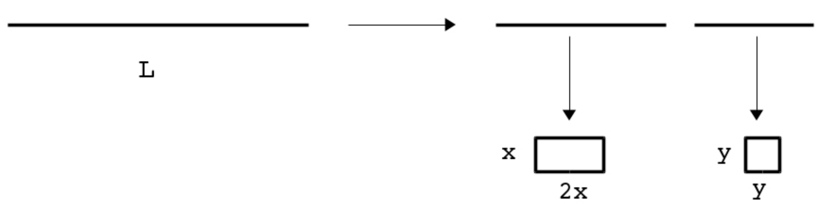
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Primeiro vamos calcular A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Logo $A^2 = 3I$, onde I é a matriz identidade. Como $I^2 = I$ temos que $B = \sqrt{3}I$ satisfaz a propriedade $B^2 = A^2$.

Questão 4 (20 pontos) Ana quer dividir uma corda de tamanho L em dois pedaços de modo que com um dos pedaços ela fará um retângulo com lados cuja razão é dois e com o outro pedaço ela fará um quadrado (veja a figura abaixo). Como Ana deve cortar sua corda de forma a minimizar a soma das áreas do quadrado e do retângulo?



Solução: A corda será dividida em duas parte: uma de comprimento z e outra de comprimento $L - z$. Com a corda de comprimento z Ana construirá um retângulo de lados x e $2x$. O perímetro do retângulo deve ser igual a z, ou seja, $x + x + 2x + 2x = z$. Disso segue que $x = z/6$. Portanto, a área do retângulo, que é igual a base vezes altura, será $z^2/18$. Com a corda de tamanho $L - z$ Ana irá construir o quadrado de lado y. Como o perímetro do quadrado é $4y$ e deve ser igual a $L - z$ concluímos que $y = (L - z)/4$. Sendo assim, a área do quadrado será $(L - z)^2/16$. A soma das áreas do quadrado e do retângulo será uma função de z dada por

$$f(z) = \frac{z^2}{18} + \frac{(L-z)^2}{16} = \frac{z^2}{18} + \frac{L^2 - 2Lz + z^2}{16} = \frac{17}{144}z^2 - \frac{L}{8}z + \frac{L^2}{16}$$

ou seja,

$$f(z) = \frac{17}{144}z^2 - \frac{L}{8}z + \frac{L^2}{16}.$$

Temos que o mínimo da função f ocorre no vértice da parábola, ou seja,

$$z = \frac{L/8}{2(17/144)} = \frac{9L}{17}.$$

Portanto, Ana deve dividir a corda em um pedaço de tamanho $9L/17$ e em um pedaço de tamanho $8L/17$. Com o primeiro pedaço ela constrói o retângulo e com o segundo o quadrado.

Questão 5 (20 pontos) Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n$ e $(c_n)_n$ três progressões aritméticas. Assuma que $a_1 = 2$, $b_1 = 4$ e $c_1 = 3$ e que a sequência $(d_n)_n$, dada por

$$d_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{(b_1 + b_2 + ... + b_n) - (c_1 + c_2 + ... + c_n)},$$

é uma progressão aritmética de razão 7. Calcule o termo a_{1001}.

Solução: Como as sequências são todas PA sabemos que

$$a_1 + ... + a_n = (a_1 + a_n)n/2, \quad b_1 + ... + b_n = (b_1 + b_n)n/2, \quad c_1 + ... + c_n = (c_1 + c_n)n/2.$$

Então

$$d_n = \frac{a_1 + a_n}{(b_1 + b_n) - (c_1 + c_n)} = \frac{2 + a_n}{(4 + b_n) - (3 + c_n)} = \frac{2 + a_n}{1 + (b_n - c_n)}.$$

Defina a sequência $(e_n)_n$ por $e_n = b_n - c_n$. Observe que $(e_n)_n$ também é uma PA pois

$$e_{n+1} - e_n = (b_{n+1} - b_n) - (c_{n+1} - c_n) = (b_n - b_{n-1}) - (c_n - c_{n-1}) = e_n - e_{n-1}.$$

Considere q a razão de e_n e r a razão de a_n. Assim

$$a_n = 2 + (n-1)r$$

e, como $e_1 = b_1 - c_1 = 1$,

$$e_n = 1 + (n-1)q.$$

Como $(d_n)_n$ é uma PA de razão 7 temos:

$$d_n = d_1 + 7(n-1) = 2 + 7(n-1).$$

Então

$$\frac{2+2+(n-1)r}{1+1+(n-1)q} = 2 + 7(n-1) \Rightarrow 4 + (n-1)r = (2 + 7(n-1))(2 + q(n-1)) \Rightarrow$$

$$4 + (n-1)r = 4 + 2q(n-1) + 14(n-1) + 7q(n-1)^2 \Rightarrow$$

$$7q(n-1)^2 + (n-1)(2q + 14 - r) = 0 \Rightarrow (n-1)(7q(n-1) + 2q + 14 - r) = 0.$$

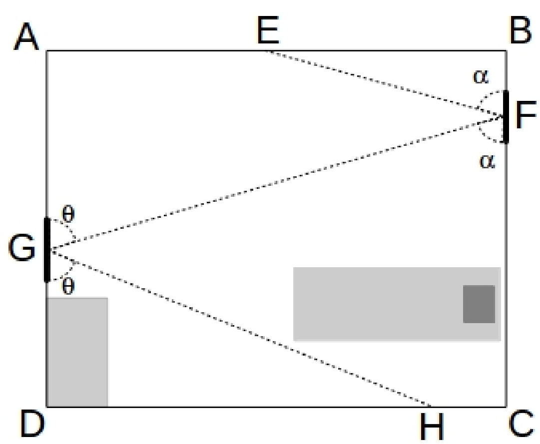
Assim, $n - 1 = 0$ ou $7q(n-1) + 2q + 14 - r = 0$. Uma vez que tal equação deve ocorrer para todo número natural n devemos ter

$$7q(n-1) + 2q + 14 - r = 0, \text{ para todo } n$$

logo, $q = 0$ e $r = 14$. Consequentemente, $a_n = 2 + 14(n-1)$ e portanto

$$a_{1001} = 2 + 14(1001 - 1) = 2 + 14 \times 1000 = 14002.$$

Questão 6 (20 pontos) Humberto está no seu quarto brincando com um laser. Na figura abaixo o quarto é representado pelo quadrado $ABCD$. Os pontos F e G representam espelhos localizados nas paredes BC e AD respectivamente. Humberto, que está representado pelo ponto H, quer iluminar o ponto E com o laser e para isso vai usar os espelhos G e F. A movimentação de Humberto está limitada pela cama e pelo guarda-roupas por isso ele deve ficar encostado na parede CD podendo apenas se aproximar ou se afastar do guarda-roupas localizado na parede AD. Sabendo que $\overline{EB} = 2$ metros, $\overline{BF} = 1$ metro e $\overline{GD} = 2$ metros calcule:



(a) a distância que Humberto deve ficar da parede AD para conseguir realizar sua brincadeira, ou seja, calcule o valor de $\overline{DH}$;

(b) a distância percorrida pelo feixe de luz.

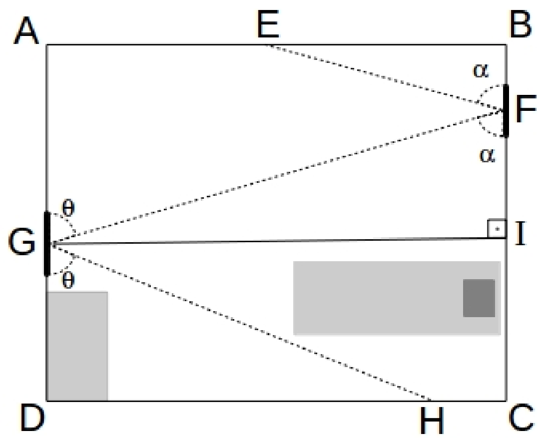
Solução:

(a) Observe que os ângulos α e θ são alternos internos e portanto $\alpha = \theta$. Como os ângulos $E\hat{B}F$ e $G\hat{D}H$ são retos então pelo critério de semelhança de triângulos AA temos que os triângulos BFE e DGH são semelhantes. Portanto,

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BF}}.$$

Como $\overline{EB} = 2$, $\overline{BF} = 1$ e $\overline{GD} = 2$ obtemos que $\overline{DH} = 4$.

(b) A distância percorrida pelo feixe de luz é igual a $\overline{HG}+\overline{GF}+\overline{FE}$. Temos que $\overline{HG}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo GDH e portanto $\overline{HG}=2\sqrt{5}$. Usando a semelhança dos triângulos BFE e DGH obtemos que $\overline{FE}=\sqrt{5}$. Para calcular $\overline{GF}$ vamos traçar uma reta perpendicular a BC passando por G. Denote por I o ponto que esta reta corta o segmento BC (veja a figura abaixo).



Com isso temos outro triângulo retângulo FIG semelhante a FBE pelo critério de semelhança AA. Logo,

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{GI}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{FI}}{\overline{FB}}.$$

Além disso, como $ABCD$ é um quadrado e $\overline{IC}=\overline{GD}$ temos que

$$\overline{GI}=\overline{BF}+\overline{FI}+\overline{IC}=1+\overline{FI}+2=3+\overline{FI}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{FI}}{\overline{FB}}\Rightarrow\frac{3+\overline{FI}}{2}=\frac{\overline{FI}}{1}\Rightarrow\overline{FI}=3$$

e com isso obtemos que

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{FI}}{\overline{FB}}\Rightarrow\frac{\overline{GF}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{1}\Rightarrow\overline{GF}=3\sqrt{5}.$$

Finalmente, temos que a distância percorrida pelo feixe de luz é igual a $6\sqrt{5}$ metros.