Gabarito da Prova da Terceira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

Determine o conjunto solução da equação

$$125^{(x^2+1)} = 3125^{(x+1)} .$$

Resolução

Inicialmente, vamos decompor em fatores primos cada um dos números 125 e 3125, que são dadas por:

$$125 = 5^3 \qquad \text{e} \qquad 3125 = 5^5 .$$

Desse modo, a equação acima pode ser escrita como:

$$125^{(x^2+1)} = 3125^{(x+1)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5^{(3x^2+3)} = 5^{(5x+5)} .$$

Assim, obtemos a seguinte equação

$$3x^2 + 3 = 5x + 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x^2 - 5x - 2 = 0 ,$$

que é uma equação de segundo grau, cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} .$$

Portanto, o conjunto solução da equação $125^{(x^2+1)} = 3125^{(x+1)}$ é dado por:

$$S = \left\{ 2 , -\frac{1}{3} \right\} .$$

Questão 2 ***20 pontos***

Considere a sequência (X_n) definida da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{0\} \\
X_2 &= \{2,\, 4\} \\
X_3 &= \{6,\, 8,\, 10\} \\
X_4 &= \{12,\, 14,\, 16,\, 18\} \\
X_5 &= \{20,\, 22,\, 24,\, 26,\, 28\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por simplicidade, vamos escrever o n–ésimo termo dessa sequência da forma:

$$X_n = \{ X_n^{(1)}, \cdots, X_n^{(n)} \} .$$

(a) *Determine o primeiro elemento do oitavo termo dessa sequência.*

(b) *Determine a soma dos elementos do oitavo termo dessa sequência.*

(c) *Determine a expressão do primeiro elemento $X_n^{(1)}$ e do n–ésimo elemento $X_n^{(n)}$ do n–ésimo termo dessa sequência em função de n.*

(d) *Mostre que a soma dos elementos do n–ésimo termo dessa sequência é dada por:*

$$\sum_{k=1}^{n} X_n^{(k)} = X_n^{(1)} + \cdots + X_n^{(n)} = n(\, n^2 - 1\,) .$$

Resolução

Observe que

$$X_1^{(1)} = 0 \quad , \quad X_2^{(1)} = 2 \quad , \quad X_3^{(1)} = 6 \quad , \quad X_4^{(1)} = 12 \quad , \quad X_5^{(1)} = 20 .$$

Assim, podemos dizer que o primeiro elemento do n–ésimo termo dessa sequência é dado por: $X_n^{(1)} = (n-1)n$. Logo, o primeiro elemento do oitavo termo dessa sequência é dado por: $X_8^{(1)} = 56$.

O oitavo termo dessa sequência, X_8, possui oito elementos que estão em uma PA de razão $q = 2$. Assim, temos

$$S_8 = \frac{8(\,56 + 70\,)}{2} = 504 ,$$

uma vez que $X_8^{(8)} = 56 + 2 \times 7 = 70$.

Observe que o n–ésimo termo dessa sequência possui n elementos que estão em uma PA de razão $q = 2$ e primeiro elemento $x_1^{(1)} = n(n-1)$. Assim, o n–elemento do n–ésimo termo dessa sequência é dado por:

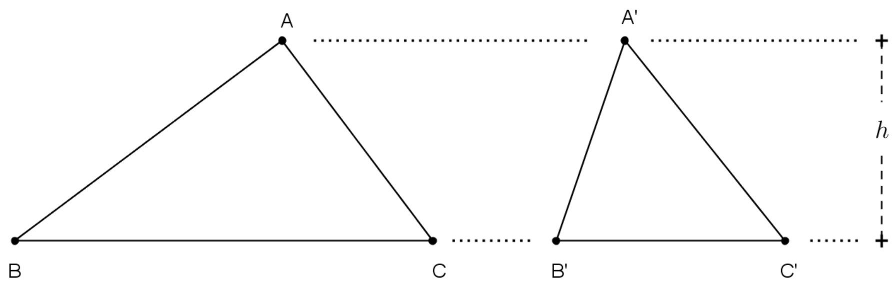
$$\begin{aligned} X_n^{(n)} &= X_n^{(1)} + q(n-1) \\ &= n(n-1) + 2(n-1) \\ &= (n - 1)(n + 2) \, . \end{aligned}$$

Vamos denotar por S_n a soma dos elementos do n–ésimo termo dessa sequência. Assim, a soma dos elementos do n–ésimo termo dessa sequência é dada por:

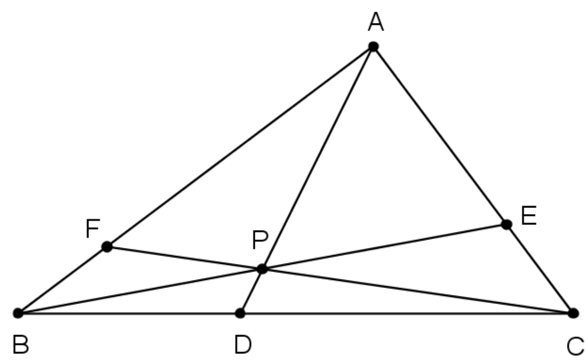
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(X_n^{(1)} + X_n^{(n)})}{2} \\ &= \frac{n((n-1)n + (n - 1)(n + 2))}{2} \\ &= \frac{(n-1)(2n+2)n}{2} \\ &= (n-1)(n+1)n \\ &= n(n^2 - 1) \, . \end{aligned}$$

Questão 3 ***20 pontos***

(a) Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$. Mostre que, se as alturas relativas às bases BC e $B'C'$ dos dois triângulos são iguais, então a razão entre a área do triângulo ABC e a área de $A'B'C'$ é igual à razão entre suas respectivas bases BC e $B'C'$.



(b) Na figura abaixo, as áreas dos triângulos APE, DCP, DBP e BPF são iguais a 100, 30, 20 e 25 centímetros quadrados, respectivamente. Determine a área do triângulo ABC.

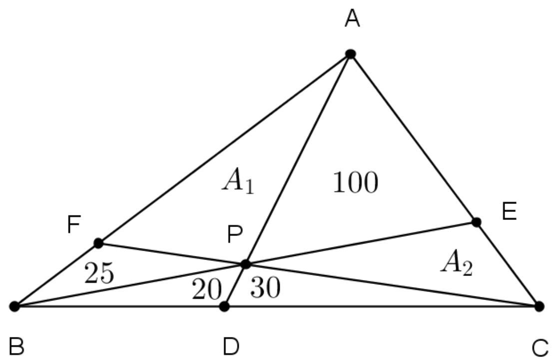


Resolução

(a) Vamos denotar por A_1 a área do triângulo ABC e por A_2 a área do triângulo $A'B'C'$. Como os triângulos ABC e $A'B'C'$ têm alturas iguais relativas às bases BC e $B'C'$, respectivamente, temos

$$A_1 = \frac{\overline{BC} \times h}{2} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\overline{B'C'} \times h}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

(b) Sejam A_1 e A_2 as áreas dos triângulos FPA e CPE, respectivamente, como ilustra a figura abaixo.



Desse modo, temos as seguintes igualdades:

(1) Como os triângulos DPB e DPC têm alturas iguais relativas às bases BD e DC, respectivamente, temos

$$\frac{20}{\overline{BD}} = \frac{30}{\overline{DC}}\,.$$

(2) Como os triângulos BDA e CDA têm alturas iguais relativas às bases BD e DC, respectivamente, temos

$$\frac{A_1 + 25 + 20}{\overline{BD}} = \frac{100 + A_2 + 30}{\overline{DC}}\,.$$

(3) Como os triângulos BFP e AFP têm alturas iguais relativas às bases BF e AF, respectivamente, temos

$$\frac{25}{\overline{BF}} = \frac{A_1}{\overline{AF}}\,.$$

(4) Como os triângulos BFC e AFC têm alturas iguais relativas às bases BF e AF, respectivamente, temos

$$\frac{30 + 20 + 25}{\overline{BF}} = \frac{A_2 + 100 + A_1}{\overline{AF}}\,.$$

De **(1)** e **(2)**, temos

$$\frac{A_1 + 25 + 20}{100 + A_2 + 30} = \frac{20}{30} \quad\Longleftrightarrow\quad 3A_1 - 2A_2 = 125\,. \qquad \textbf{(5)}$$

De **(3)** e **(4)**, temos

$$\frac{30 + 20 + 25}{A_2 + 100 + A_1} = \frac{25}{A_1} \quad\Longleftrightarrow\quad 2A_1 - A_2 = 100\,. \qquad \textbf{(6)}$$

De **(5)** e **(6)**, temos

$$A_1 = \frac{125 + 2A_2}{3} = \frac{100 + A_2}{2} \iff 250 + 4A_2 = 300 + 3A_2 \iff A_2 = 50\,.$$

Assim, temos $A_1 = 75$.

Portanto, a área do triângulo ABC é igual a $75 + 25 + 20 + 100 + 50 + 30 = 300\,cm^2$.

Questão 4 ***20 pontos***

Definição 1 *A* ***Distância do Táxi*** *entre os pontos* $P = (a\,,b)$ *e* $Q = (c\,,d)$*, que vamos denotar por* $d_T(P,Q)$*, no plano numérico é definida da forma:*

$$d_T(P,Q) = |\,c - a\,| + |\,d - b\,| \;.$$

(a) Dados os pontos $P = (2,4)$ *e* $B = (4\,,b)$*, determine o(s) valor(es) do parâmetro* b *de modo que* $d_T(P,B) = 9$*.*

(b) Dado o ponto $P = (2,5)$ *e a reta* r *representada pela equação*

$$2x + y = 4\;.$$

Determine os pontos Q *pertencentes à reta* r *de maneira que* $d_T(P,Q) = 5$*.*

Resolução

(a) A distância do táxi entre os pontos P e B é dada por:

$$d_T(P,B) = |\,4 - 2\,| + |\,b - 4\,| = 9 \quad\Longleftrightarrow\quad |\,b - 4\,| = 7\;.$$

Desse modo, temos que resolver a seguinte equação modular

$$|\,b - 4\,| = 7\;,$$

que ficamos com duas situações dadas por:

$$b - 4 = 7 \qquad \text{e} \qquad -(\,b - 4\,) = 7\;,$$

que fornecem as seguintes soluções $b = 11$ e $b = -3$.

Portanto, encontramos dois pontos $B_1 = (4,11)$ e $B_2 = (4,-3)$ que satisfazem a condição $d_T(P,B) = 9$.

(b) Note que os pontos que pertencem à reta r são escritos por $Q = (x\,,4-2x)$. Desse modo, a distância do táxi entre os pontos P e Q é dada por:

$$d_T(P,B) = |\,x - 2\,| + |\,4 - 2x - 5\,| = 5$$

Desse modo, temos que resolver a seguinte equação modular

$$|\,x - 2\,| + |\,2x + 1\,| = 5\;.$$

Assim temos as seguinte situações

Primeira Situação: $x - 2 \geq 0$ e $2x + 1 \geq 0$, isto é,

$$x \geq 2 \qquad \text{e} \qquad x \geq -\frac{1}{2}\;,$$

o que torna possível obter uma solução da equação

$$x - 2 + 2x + 1 = 5 \quad\Longleftrightarrow\quad 3x = 6 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2\;.$$

Assim, obtemos um primeiro ponto $Q_1 = (2,0) \in r$.

Segunda Situação: $x - 2 \geq 0$ e $2x + 1 \leq 0$, isto é,

$$x \geq 2 \qquad \text{e} \qquad x \leq -\frac{1}{2},$$

o que torna impossível obter uma solução da equação modular, com essa situação.

Terceira Situação: $x - 2 \leq 0$ e $2x + 1 \geq 0$, isto é,

$$x \leq 2 \qquad \text{e} \qquad x \geq -\frac{1}{2},$$

o que torna possível obter uma solução da equação

$$-x + 2 + 2x + 1 = 5 \iff x = 2\,.$$

Assim, obtemos o mesmo ponto $Q_1 = (2, 0) \in r$, com essa situação.

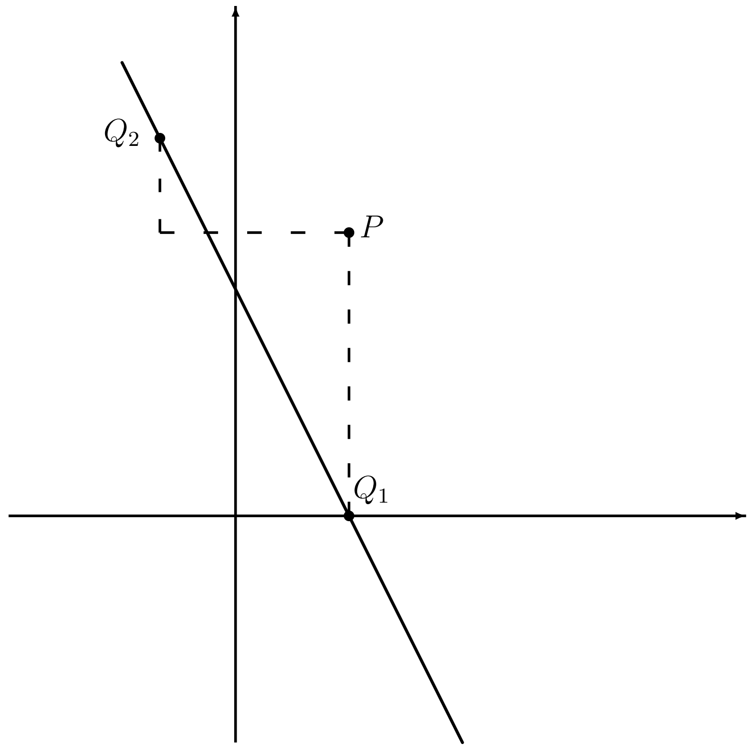
Quarta Situação: $x - 2 \leq 0$ e $2x + 1 \leq 0$, isto é,

$$x \leq 2 \qquad \text{e} \qquad x \leq -\frac{1}{2},$$

o que torna possível obter uma solução da equação

$$-x + 2 - 2x - 1 = 5 \iff -3x = 4 \iff x = -\frac{4}{3}\,.$$

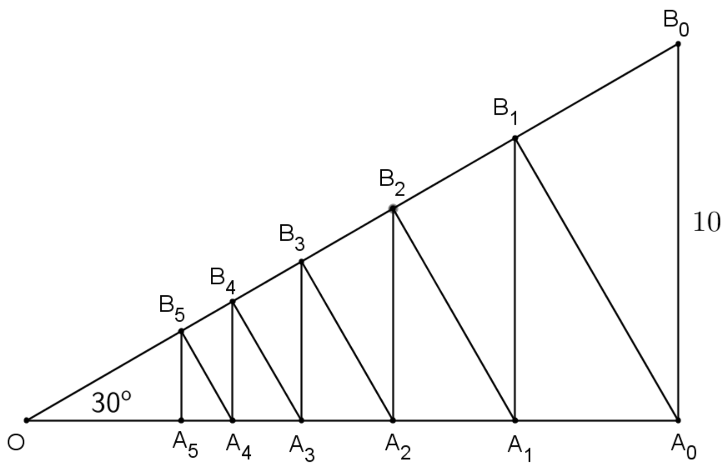
Assim, obtemos um segundo ponto $Q_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right) \in r$.


Q_2
P
Q_1

Questão 5 ***20 pontos***

Na figura abaixo, os ângulos $O\widehat{A_i}B_i$ *para* $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5$ *e os ângulos* $O\widehat{B_{i+1}}A_i$ *para* $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4$ *são ângulos retos. Além disso,* $A_0\widehat{O}B_0 = 30^o$ *e* $\overline{A_0B_0} = 10$ *centímetros. Determine a soma dos comprimentos dos segmentos*

$$A_0B_0\ ,\ A_1B_1\ ,\ A_2B_2\ ,\ A_3B_3\ ,\ A_4B_4\ \ e\ \ A_5B_5\ .$$

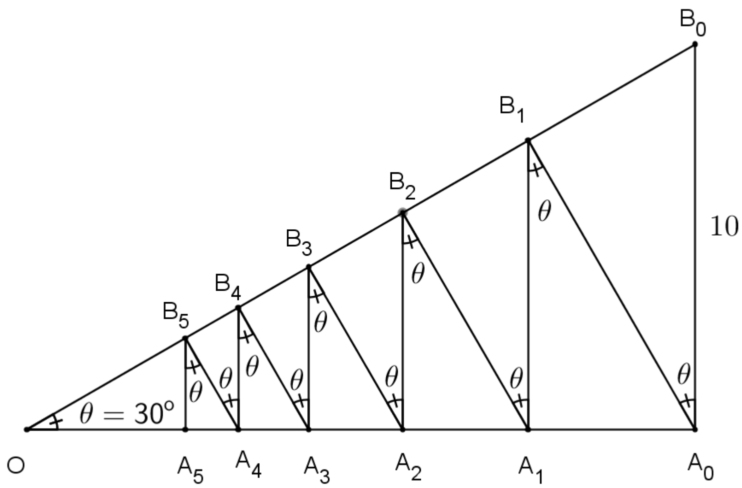


Resolução

Como

$$A_{i+1}A_i \perp A_iB_i \qquad \text{e} \qquad B_iB_{i+1} \perp B_{i+1}A_i \qquad \text{para} \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\ ,$$

os ângulos $B_i\widehat{A_i}B_{i+1}$ e $B_i\widehat{B_{i+1}}A_{i+1}$ são todos iguais a $\theta = 30^o$ para $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$



Assim, temos

$$\overline{A_i B_{i+1}} = \overline{A_i B_i} \cos(\theta) \qquad \text{para} \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\,.$$

e

$$\overline{A_{i+1} B_{i+1}} = \overline{A_i B_{i+1}} \cos(\theta) \qquad \text{para} \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\,.$$

Desse modo, temos

$$\overline{A_{i+1} B_{i+1}} = \overline{A_i B_i} (\cos(\theta))^2 \qquad \text{para} \qquad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\,.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{5} \overline{A_i B_i} = \overline{A_0 B_0} \left(1 + (\cos(\theta))^2 + (\cos(\theta))^4 + (\cos(\theta))^6 + (\cos(\theta))^8 + (\cos(\theta))^{10} \right)$$

com $\overline{A_0 B_0} = 10\,cm$ e $(\cos(\theta))^2 = \dfrac{3}{4}$, uma vez que $\theta = 30^o$.

Assim, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita de seis termos, com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = (\cos(\theta))^2 = \dfrac{3}{4}$, obtemos

$$\sum_{i=0}^{5} \overline{A_i B_i} = 10 \frac{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^6}{1 - \dfrac{3}{4}} = \frac{16835}{512}\, cm\,.$$