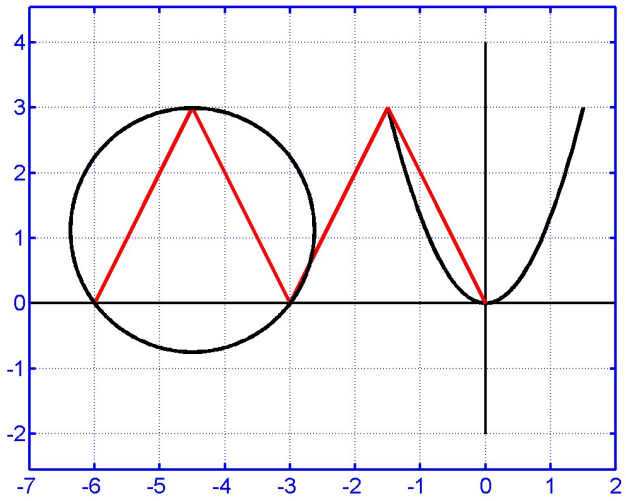


Gabarito da Prova da Terceira Fase

22 de Agosto de 2009

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
T o t a l	

Questão 1 ***20 pontos***

Considere no plano cartesiano o triângulo retângulo ABC de vértices

$$A = (4,0) \quad , \quad B = (0,6) \qquad e \qquad C = (0,0) \, ,$$

e considere um retângulo inscrito nesse triângulo tendo o ponto C como um dos vértices.

(a) Inicialmente faça um desenho no plano cartesiano representando a situação descrita no problema.

(b) Existe um retângulo inscrito nesse triângulo cuja área seja igual a 8? Justifique sua resposta.

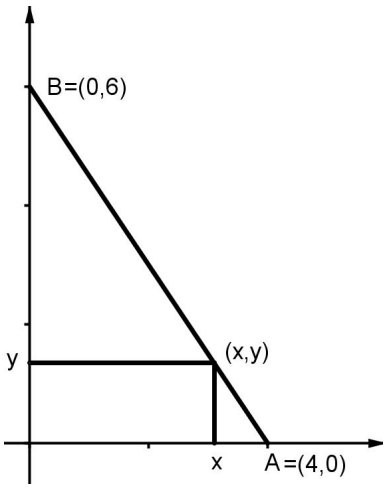
(c) Na mesma situação, considerando o triângulo retângulo ABC de vértices

$$A = (a,0) \quad , \quad B = (0,b) \qquad e \qquad C = (0,0) \, ,$$

com $a > 0$ e $b > 0$, determine o retângulo de maior área inscrito nesse triângulo, justificando sua resposta.

Resolução

(a) Representação gráfica da situação descrita no problema é ilustrada na figura abaixo.



(b) A equação da reta que passa pelos pontos $A = (4,0)$ e $B = (0,6)$ é dada pela equação

$$y = -\frac{3}{2}x + 6 \, .$$

Para que exista um retângulo, como descrito, de área igual a 8, as medidas x e y de seus lados devem satisfazer a equação $xy = 8$. Assim, a área do retângulo é dada pela seguinte equação quadrática

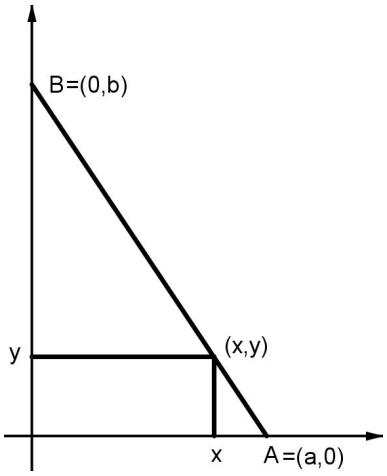
$$-\frac{3}{2}x^2 + 6x = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x^2 - 12x + 16 = 0\,.$$

Observamos que o discriminante da equação quadrática é dado por:

$$\triangle = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 16 = -48 < 0\,.$$

Como o discriminante é negativo, a equação quadrática não possui raiz real. Assim, não existe retângulo inscrito de área igual a 8.

(c) Inicialmente vamos considerar a representação gráfica da situação descrita no problema, ilustrada pela figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ é dada pela equação

$$y = -\frac{b}{a}x + b\,.$$

Desse modo, a área do retângulo tendo x e y como medidas de seus lados é dada pela seguinte função quadrática

$$A(x) = -\frac{b}{a}x^2 + bx$$

Para determinar o retângulo de área máxima, devemos encontrar o ponto x para o qual a função quadrática

$$A(x) = -\frac{b}{a}x^2 + bx$$

assume o valor máximo.

A função quadrática $A(x)$ assume o valor máximo no ponto x, onde o par ordenado (x, y) é o vértice da parábola, que no caso tem concavidade voltada para baixo. Assim,

$$x = -\frac{b}{-2\frac{b}{a}} = \frac{a}{2},$$

o que implica $y = \frac{b}{2}$.

Portanto, as medidas dos lados do retângulo de maior área possível inscrito no triângulo retângulo são dadas por:

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{2},$$

cuja área é igual a $\frac{a\,b}{4}$, o que completa a resolução da questão.

Questão 2 ***20 pontos***

Considere as somas

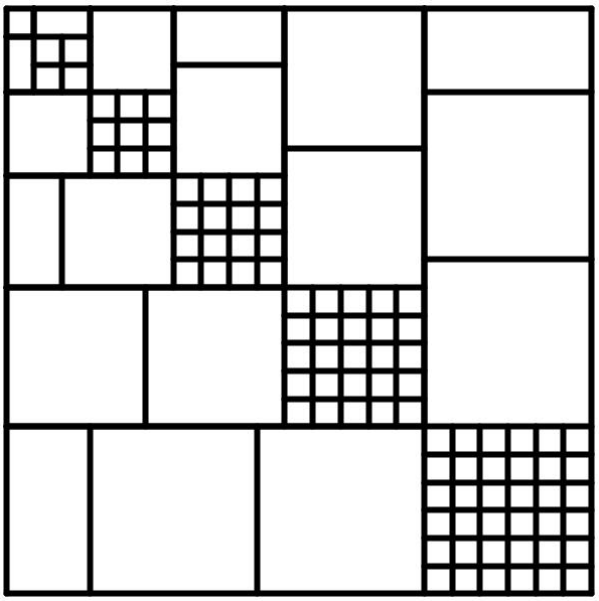
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \qquad e \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\,.$$

(a) Utilize a figura abaixo para fornecer uma interpretação geométrica de cada uma dessas somas e encontrar uma relação entre elas. Justifique sua resposta.

(b) Estabeleça uma relação entre as somas

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \quad e \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n\,.$$

Descreva de forma detalhada o seu raciocínio. Considere que cada um dos quadrados menores, na figura abaixo, tem área unitária.



Resolução

(a) Na figura abaixo, destacamos as regiões $R_1, \cdots, R_6$ que formam a figura original, obtendo

(R_1) um quadrado de área 1.

(R_2) um quadrado de área 2^2 e dois retângulos de área $\dfrac{2^2}{2}$, com área total

$$2^2 + 2\frac{2^2}{2} = 2^3 .$$

(R_3) três quadrados de área 3^2, com área total 3^3.

(R_4) três quadrados de área 4^2 e dois retângulos de área $\dfrac{4^2}{2}$, com área total

$$3 \times 4^2 + 2\frac{4^2}{2} = 4^3 .$$

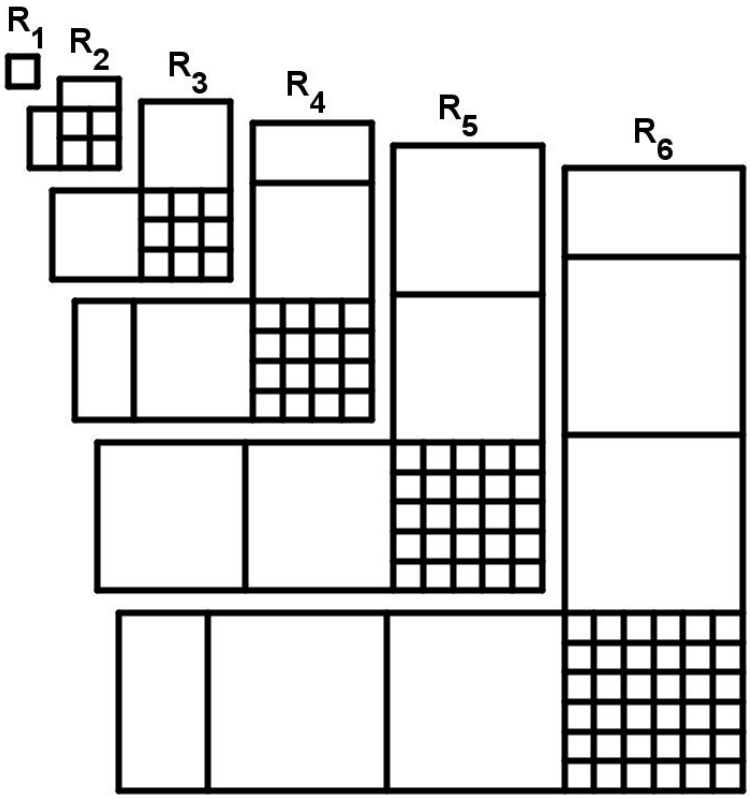
(R_5) cinco quadrados de área 5^2, com área total 5^3.

(R_6) cinco quadrados de área 6^2 e dois retângulos de área $\dfrac{6^2}{2}$, com área total

$$5 \times 6^2 + 2\frac{6^2}{2} = 6^3 .$$

Desse modo, a área total do quadrado maior pode ser escrita como:

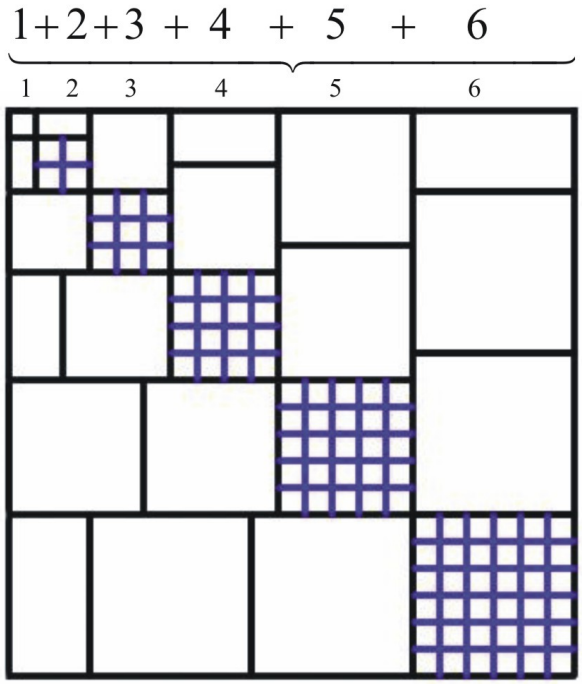
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 .$$


R1
R2
R3
R4
R5
R6

Por outro lado, como mostra a figura abaixo, a área total também pode ser escrita como

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 ,$$

uma vez que o lado do quadrado maior é igual a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.



Portanto, obtemos a seguinte relação entre as somas:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 .$$

(b) A partir das interpretações geométricas apresentadas acima, vamos propor a seguinte generalização

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n)^2 .$$

Provaremos a afirmação acima pelo princípio da indução finita.

Podemos verificar facilmente que a relação é válida para $n = 1$. Pela hipótese de indução, consideramos que a relação acima seja válida, e vamos mostrar que é válida para $n + 1$.

Tomando

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n + (n+1))^2 = (S_n + (n+1))^2 ,$$

onde por simplicidade denotamos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n .$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
(S_n + (n+1))^2 &= (S_n)^2 + 2(n+1)S_n + (n+1)^2 \\
&= (S_n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&= (S_n)^2 + (n+1)^2(n+1) \\
&= (S_n)^2 + (n+1)^3 \\
&= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3
\end{aligned}$$

uma vez que

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

Portanto, mostramos que a relação é válida para todo número natural.

Questão 3 ***20 pontos***

Para cada um dos ítens abaixo, diga se a afirmação é ***F****alsa ou* ***V****erdadeira. Caso seja* ***F****alsa, dê um contraexemplo. Se for* ***V****erdadeira prove. O número* $n^3 - n$ *é*

(a) divisível por 3

(b) primo

(c) par

(d) múltiplo de 9

para qualquer $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Resolução

(a) Podemos observar que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)\,.$$

Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, temos somente uma das seguintes situações

$$n = 3m$$
$$n = 3m + 1$$
$$n = 3m + 2$$

para algum $m \in \mathbb{N}$.

Desse modo, vamos analisar cada uma das situações acima:

- para $n = 3m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, temos que
$$n^3 - n = n(n+1)(n-1) = 3m'\,,$$
onde $m' = m(3m+1)(3m-1) \in \mathbb{N}$.
- para $n = 3m + 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, temos que
$$n^3 - n = n(n+1)(n-1) = 3m'\,,$$
onde $m' = m(3m+1)(3m+2) \in \mathbb{N}$.
- para $n = 3m + 2$, para algum $m \in \mathbb{N}$, temos que
$$n^3 - n = n(n+1)(n-1) = 3m'\,,$$
onde $m' = (m+1)(3m+1)(3m+2) \in \mathbb{N}$.

Assim, mostramos que o número $n^3 - n$ é divisível por três.

De uma maneira resumida, temos que o número $n^3 - n$ é o produto de três números consecutivos, $n-1$, n , $n+1$. De modo que ao menos um deles deve ser múltiplo de 3, e conseqüentemente, seu produto também deve ser um múltiplo de 3, isto é, o número $n^3 - n$ é divisível por três.

Portanto, a afirmação é **Verdadeira**.

(b) A afirmação é **Falsa**. De fato, basta tomar, por exemplo, $n = 2$. Assim, temos que

$$n^3 - n = 8 - 2 = 6 ,$$

que não é um número primo. Na realidade, o número $n^3 - n$ nunca é primo, pois ele pode ser decomposto no produto de três outros números naturais.

(c) Podemos observar que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1) .$$

Agora vamos recordar que

- O produto de dois números **pares** é um número **par**.
- O produto de dois números **ímpares** é um número **ímpar**.
- O produto de um número **par** por um número **ímpar** é um número **par**.

Finalmente, vamos analisar as seguintes situações:

1. Se n é um número **par**, temos que $(n+1)$ é um número ímpar, e $(n-1)$ é um número ímpar. Logo, temos que $n^3 - n$ é um número **par**.
2. Se n é um número **ímpar**, temos que $(n+1)$ é um número par, e $(n-1)$ é um número par. Logo, temos que $n^3 - n$ é um número **par**.

De uma maneira resumida, temos que o produto qualquer de números naturais é ímpar se, e somente se, todos os fatores forem ímpares. Como ao menos um dos fatores $n-1$, n , $n+1$ deve ser um número par, temos que $n^3 - n$ é um número par.

Portanto, a afirmação é **Verdadeira**.

(d) A afirmação é **Falsa**. De fato, basta tomar, por exemplo, $n = 3$. Assim, temos que

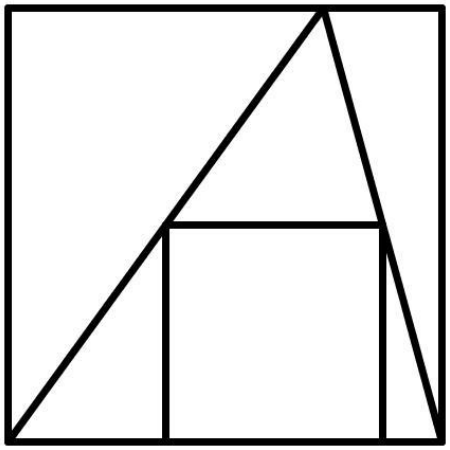
$$n^3 - n = 27 - 3 = 24\,,$$

que não é um múltiplo de 9.

Observe que para $n = 8$, temos $n^3 - n = 504 = 9 \times 56$, que é um múltiplo de 9.

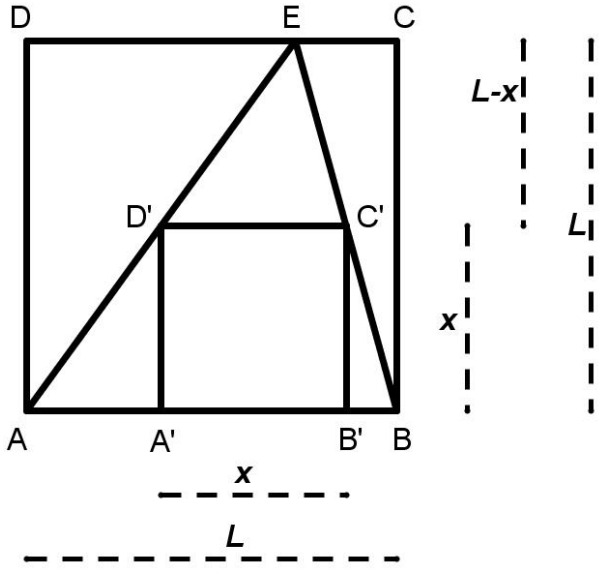
Questão 4 ***20 pontos***

Considere um quadrado com lado de comprimento L. Tome um triângulo inscrito nesse quadrado e um novo quadrado inscrito no triângulo, como mostra a figura abaixo. Determine o comprimento do lado do quadrado menor inscrito no triângulo, justificando sua resposta.



Primeira Proposta de Resolução

Temos que L é a medida do lado do quadrado maior $ABCD$, e considere x a medida do lado do quadrado menor $A'B'C'D'$, como mostra a figura abaixo.



Os triângulos ABE e $D'C'E$ são semelhantes, pois $D'C'$ e AB são paralelos. Assim, temos que

$$\frac{L-x}{x} = \frac{L}{L} = 1\,,$$

onde $L-x$ e x são a altura e a base do triângulo $D'C'E$, respectivamente, a base e a altura do triângulo ABC são iguais a L.

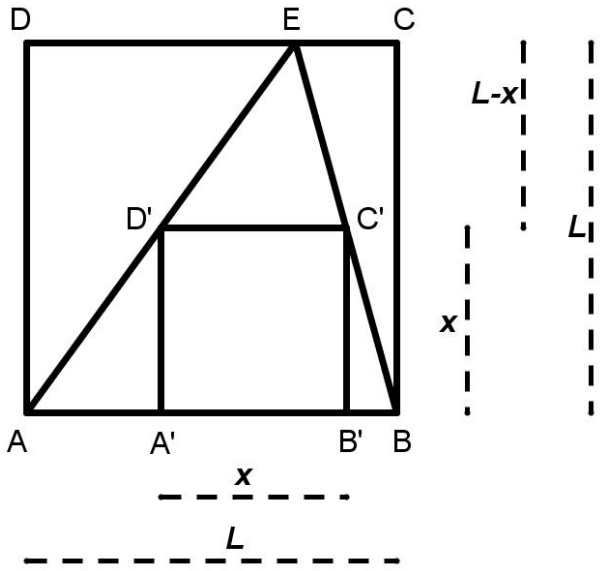
Da relação acima, obtemos

$$\frac{L-x}{x} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{L}{2}\,.$$

Portanto, a medida do lado do quadrado menor é igual a metade da medida do lado do quadrado maior.

Segunda Proposta de Resolução

Temos que L é a medida do lado do quadrado maior $ABCD$, e considere x a medida do lado do quadrado menor $A'B'C'D'$, como mostra a figura abaixo.



Como a soma das áreas dos triângulos $AA'D'$, $BB'C$ e $D'C'E$ e a área do quadrado menor $A'B'C'D'$ é igual a área do triângulo ABE, temos que

$$\frac{AA' \times x}{2} + \frac{BB' \times x}{2} + \frac{x(L-x)}{2} + x^2 = \frac{L^2}{2},$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$(AA' + BB') \times x + x(L-x) + 2x^2 = L^2.$$

Como $AA' + BB' = L - x$, obtemos

$$\begin{aligned} 2x(L-x) + 2x^2 &= L^2 \\ 2Lx &= L^2 \\ x &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

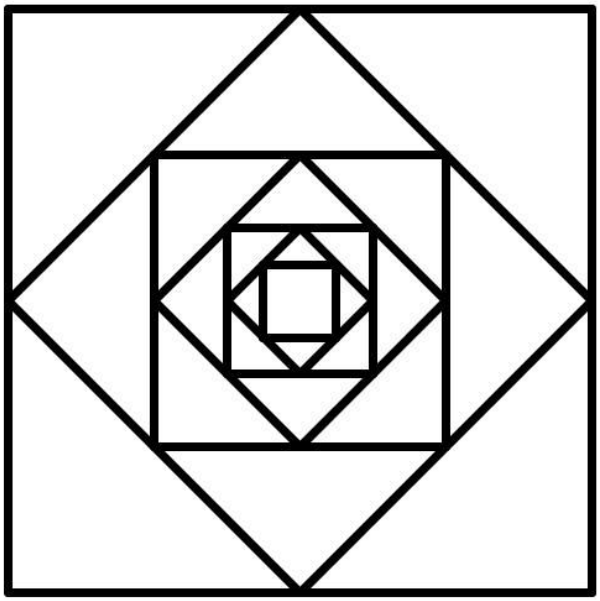
Portanto, a medida do lado do quadrado menor é igual a metade da medida do lado do quadrado maior.

Questão 5 ***20 pontos***

Sete quadrados são colocados um dentro do outro, de tal forma que os pontos médios de cada lado do quadrado externo são os vértices do quadrado interno, como mostrado na figura abaixo. Chame o quadrado menor de Q_1, o seguinte de Q_2, e assim por diante. Considere o quadrado Q_1 de área unitária.

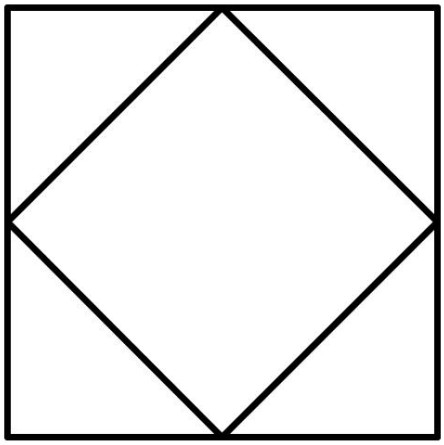
(a) Determine a área compreendida entre os quadrados Q_6 e Q_7, os maiores quadrados na ilustração abaixo.

(b) Encontre a área do quadrado Q_{217}, expressando–a como potência de 2.

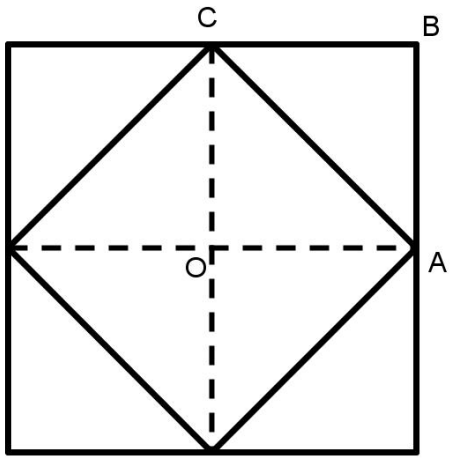


Primeira Proposta de Resolução

(a) Considere dois quadrados como na figura abaixo, onde os vértices do quadrado menor são os pontos médios dos lados do quadrado maior.



A área do quadrado maior é igual ao dobro da área do quadrado menor, pois, a área do quadrado $OABC$ é o dobro da área do triângulo OAC, como mostra a figura abaixo.



Voltando a situação descrita no problema, chamando de $A_1, \cdots, A_7$ as respectivas áreas dos quadrados $Q_1, \cdots, Q_7$, temos que

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 &&= 2^0 \\ A_2 &= 2 \times A_1 &&= 2^1 \\ A_3 &= 2 \times A_2 &&= 2^2 \\ A_4 &= 2 \times A_3 &&= 2^3 \\ A_5 &= 2 \times A_4 &&= 2^4 \\ A_6 &= 2 \times A_5 &&= 2^5 \\ A_7 &= 2 \times A_6 &&= 2^6 \end{aligned}$$

Portanto, a área delimitada pelos quadrados Q_6 e Q_7 é dada por:

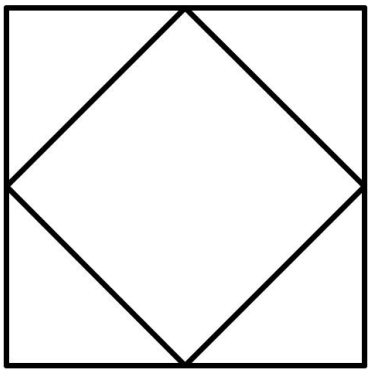
$$A_7 - A_6 = 2^6 - 2^5 = 2^5(2-1) = 2^5 = 32\,.$$

(b) Desse modo, a área do quadrado Q_{217} representada como potência de 2 é dada por:

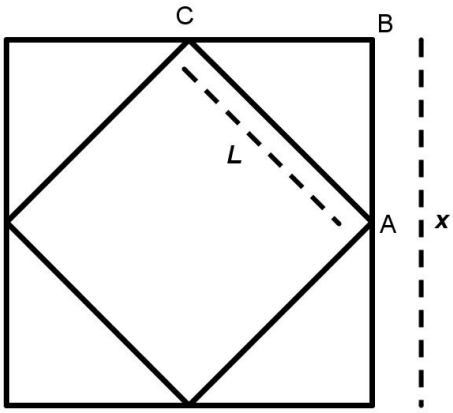
$$A_{217} = 2^{216}\,.$$

Segunda Proposta de Resolução

(a) Considere dois quadrados como na figura abaixo, onde os vértices do quadrado menor são os pontos médios dos lados do quadrado maior.



Considerando a medida do lado do quadrado menor igual a L e a medida do lado do quadrado maior igual a x, como mostra a figura abaixo.



Utilizando o Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo ABC, temos

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = L^2.$$

Logo, $x = L\sqrt{2}$.

Então a área do quadrado menor é igual a L^2, e a área do quadrado maior é igual a x^2, ou seja, $2L^2$. Portanto, a área do quadrado maior é o dobro da área do quadrado menor.

Voltando a situação descrita no problema, chamando de $A_1, \cdots, A_7$ as respectivas áreas dos quadrados $Q_1, \cdots, Q_7$, temos que

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 &&= 2^0 \\ A_2 &= 2 \times A_1 &&= 2^1 \\ A_3 &= 2 \times A_2 &&= 2^2 \\ A_4 &= 2 \times A_3 &&= 2^3 \\ A_5 &= 2 \times A_4 &&= 2^4 \\ A_6 &= 2 \times A_5 &&= 2^5 \\ A_7 &= 2 \times A_6 &&= 2^6 \end{aligned}$$

Portanto, a área delimitada pelos quadrados Q_6 e Q_7 é dada por:

$$A_7 - A_6 = 2^6 - 2^5 = 2^5(2-1) = 2^5 = 32\,.$$

(b) Desse modo, a área do quadrado Q_{217} representada como potência de 2 é dada por:

$$A_{217} = 2^{216}\,.$$

Questão 6 ***20 pontos***

Combinando cores.

(a) Marcelo vive em uma casa com cinco paredes externas, como na Figura 1. Ele tem tinta de três cores diferentes: azul, verde e amarelo. De quantas maneiras ele pode pintar a casa por fora, usando uma única cor por parede, de modo que paredes adjacentes não tenham a mesma cor?

(b) Petronio tem um pião de cinco lados, cuja face superior é representada na Figura 1, e quer pintar cada região triangular com uma das cores: azul, verde ou amarelo. De quantas formas ele pode pintá–lo de modo que triângulos com um lado em comum não tenham a mesma cor?

(c) Claudina deseja fazer uma pulseira com cinco contas, cujo modelo está representado na Figura 1. As contas utilizadas pela Claudina podem ser azul, verde ou amarela. De quantas maneiras ela pode fazer a pulseira de modo que contas adjacentes não sejam da mesma cor?

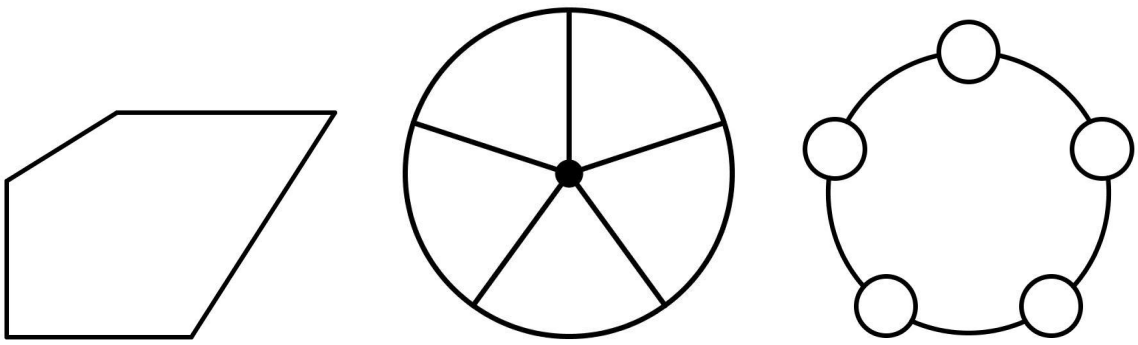


Figura 1: Da esquerda para a direita, temos uma representação da casa do Marcelo, do pião do Petronio e da pulseira da Claudina.

Resolução

(a) Suponhamos que a parede vertical da esquerda seja pintada de Azul. Girando no sentido anti–horário, a parede seguinte pode ser Amarela ou Verde; se for amarela, a seguinte pode ser Azul ou Verde, e assim sucessivamente. O seguinte diagrama ilustra as possíveis configurações das cores, veja Figura 2.

Observamos que na última linha, não podemos ter a cor Azul, já que a quinta parede é vizinha da primeira. Temos assim, 10 possíveis configurações, com cor Azul na parede da esquerda. Como esta parede pode ser Azul, Amarela ou Verde, temos no total 3×10 possíveis configurações.

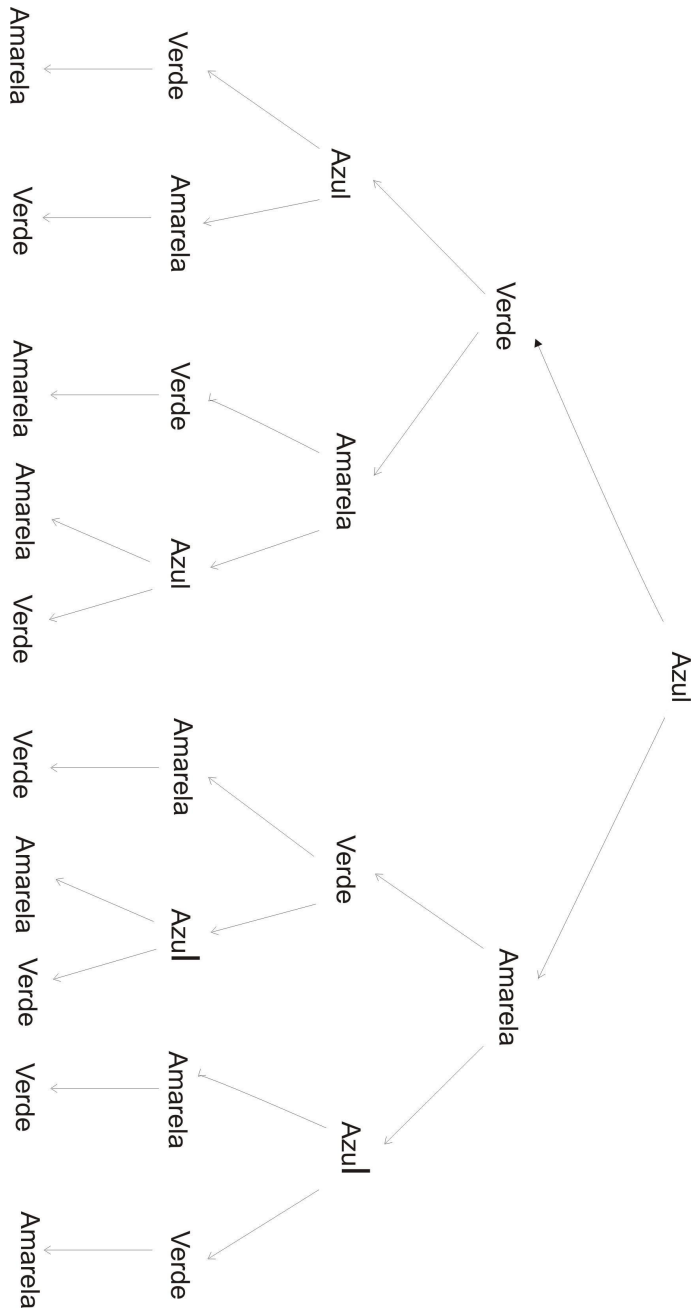


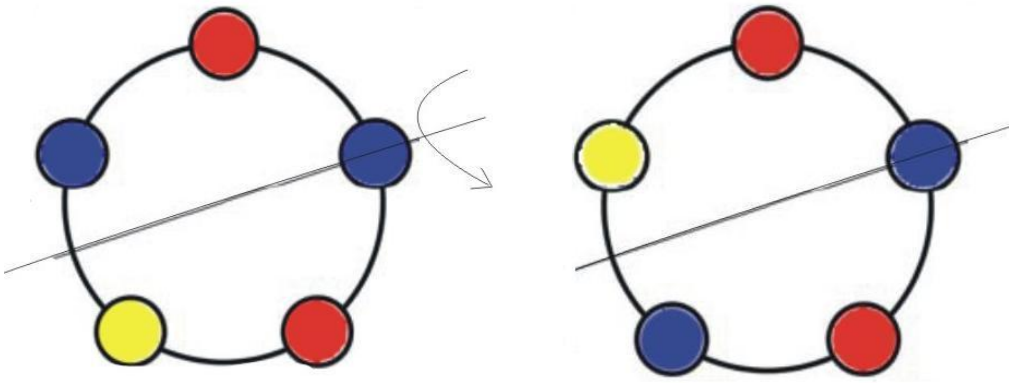
Figura 2: Configurações de cores da Casa do Marcelo.

(b) À diferença do item *(a)*, o pião não tem lados diferentes como a casa. Portanto as configurações são invariantes por rotação. Por exemplo, as configurações

Azul	Amarelo	Verde	Azul	Amarelo
Amarelo	Verde	Azul	Amarelo	Azul
Verde	Azul	Amarelo	Azul	Amarelo
Azul	Amarelo	Azul	Amarelo	Verde
Amarelo	Azul	Amarelo	Verde	Azul

que são obtidas a partir da primeira, simplesmente rotacionando uma posição à esquerda, são diferentes para a casa, mas são a mesma para o pião. Sendo assim, para o pião temos 5 vezes menos configurações possíveis do que para a casa, portanto $\frac{30}{5} = 6$ possibilidades.

(c) Para a pulseira, assim como para o pião, há invariância por rotação das cores. Mas, à diferença do pião, podemos ainda considerar que a pulseira pode ser usada de ambos os lados. Assim, para cada configuração da pulseira há duas para o pião: a configuração e a configuração simétrica em relação a um eixo central, como na figura abaixo.



Portanto, a pulseira tem metade das possibilidades do pião, isto é, apenas 3 possíveis configurações de cores, que são,

Amarelo	Azul	Amarelo	Azul	Verde
Amarelo	Verde	Amarelo	Verde	Azul
Azul	Verde	Azul	Verde	Amarelo