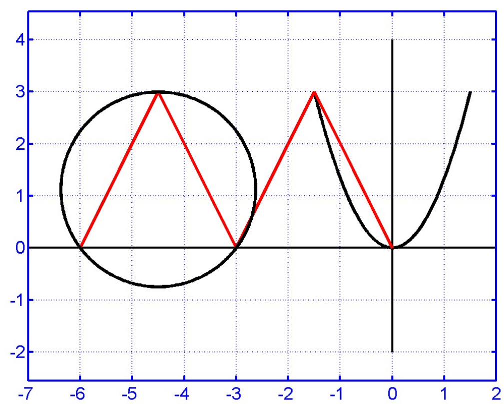


Gabarito da Prova da Terceira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

Considere três dados honestos com faces numeradas de 1 a 6. Joga–se um dado de cada vez.

(a) *Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?*

(b) *Qual a probabilidade que a soma dos resultados seja maior ou igual a 16?*

Resolução

(a) Sejam d_1, d_2 e d_3 os resultados obtidos nos dados 1, 2 e 3, respectivamente. Como procura–se os casos em que $d_1 \neq d_2$, $d_1 \neq d_3$ e $d_2 \neq d_3$, temos que o número de possíveis resultados para d_1 são 6, para d_2 são 5 (devem ser diferentes de d_1) e para d_3 são 4 (devem ser diferentes de d_1 e de d_2). Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de resultados possíveis é $6 \times 5 \times 4 = 120$.

(b) A maior soma dos resultados dos dados ocorre quando os resultados de todos os dados é máximo, isto é, quando o resultado dos dados é 6, e portanto a soma máxima é 18.

Como estamos interessados na soma dos dados ser maior ou igual a 16, construímos a tabela a seguir mostrando os possíveis casos.

Soma dos dados	d_1	d_2	d_3
18	6	6	6
17	6	6	5
17	6	5	6
17	5	6	6
16	6	6	4
16	6	4	6
16	4	6	6
16	6	5	5
16	5	6	5
16	5	5	6

Pela tabela acima, verifica–se que o número de casos de interesse são. Como a probabilidade de um resultado X, $P(X)$, é definida por

$$P(X) = \frac{\text{número de ocorrências de } X}{\text{número de resultados possíveis}}$$

e pelo Princípio Fundamental da Contagem temos que o número de resultados possíveis é $6 \times 6 \times 6 = 216$, conclui–se que a probabilidade é $\dfrac{10}{216}$.

Questão 2 ***20 pontos***

Vamos definir no conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, *as operações* $\oplus$ *e* $\otimes$ *da forma:*

$$x \oplus y = x + y + 4 \qquad e \qquad x \otimes y = \frac{x \times y}{3} \qquad \text{para todos} \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

onde $+$ *é a operação de adição e* $\times$ *é a operação de multiplicação de números reais.*

(a) Mostre que existe um número real μ *tal que* $x \otimes \mu = \mu \otimes x = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *isto é,* μ *é o* ***elemento neutro*** *da operação* $\otimes$.

(b) Mostre que para todo número real $x \neq 0$ *existe um número real* $\widehat{x}$ *tal que*

$$x \otimes \widehat{x} = \widehat{x} \otimes x = \mu,$$

isto é, $\widehat{x}$ *é o* ***elemento simétrico*** *do elemento* x, *com relação a operação* $\otimes$.

(c) Considerando as operações $\oplus$ *e* $\otimes$, *determine o conjunto solução da equação*

$$x \otimes (x \oplus 3) = -2.$$

Resolução

(a) Vamos mostrar que existe um número real μ tal que $x \otimes \mu = \mu \otimes x = x$. Inicialmente, considerando $x \neq 0$, tem–se

$$x \otimes \mu = \frac{x \times \mu}{3} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu = 3$$

$$\mu \otimes x = \frac{\mu \times x}{3} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu = 3$$

Observe que para $x = 0$, tomando $\mu = 3$ relação acima também é satisfeita. Portanto, o elemento neutro da operação $\otimes$ é $\mu = 3$.

(b) Vamos mostrar que para todo número real $x \neq 0$ existe um número real $\widehat{x}$ tal que $x \otimes \widehat{x} = \widehat{x} \otimes x = \mu$.

$$x \otimes \widehat{x} = \frac{x \times \widehat{x}}{3} = 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{x} = \frac{9}{x}$$

$$\widehat{x} \otimes x = \frac{\widehat{x} \times x}{3} = 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{x} = \frac{9}{x}$$

Portanto, o elemento simétrico para um número real $x \neq 0$, com relação a operação $\otimes$, é dado por:

$$\widehat{x} = \frac{9}{x}.$$

(c) Considerando as operações $\oplus$ e $\otimes$, a equação $x \otimes (x \oplus 3) = -2$, fica escrita da forma:

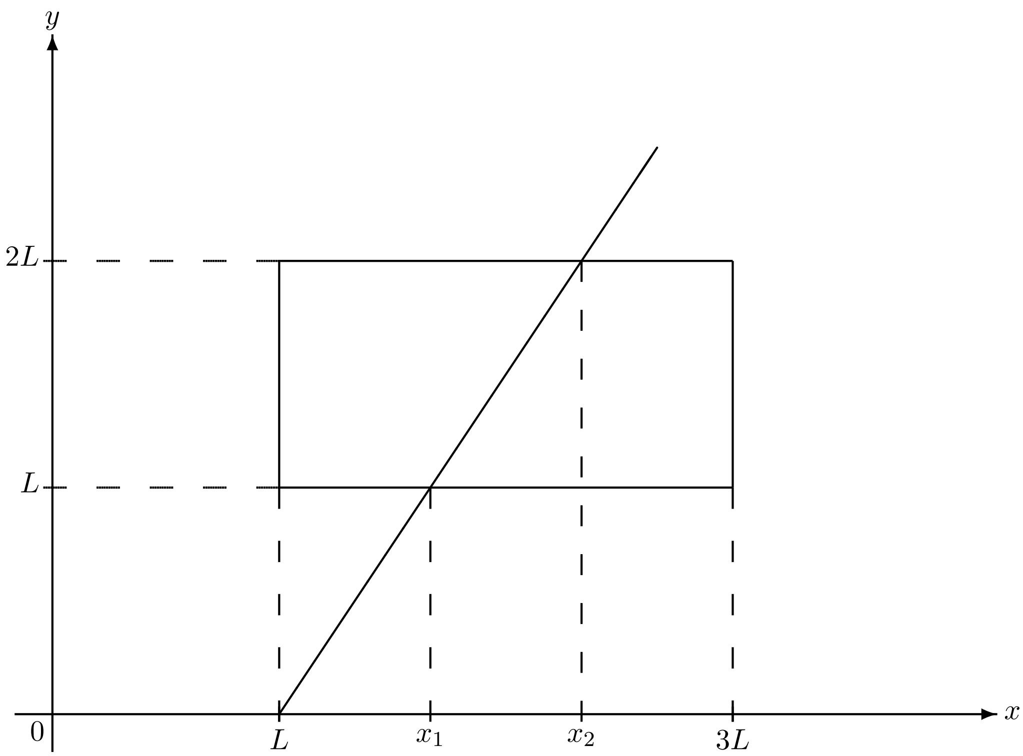
$$\frac{x(x + 3 + 4)}{3} = -2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 7x + 6 = 0,$$

que é uma equação quadrática, cujas soluções são dadas por:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = -6 \quad \text{e} \quad x_2 = -1.$$

Questão 3 ***20 pontos***

Na figura abaixo temos uma reta passando pelo ponto $P = (L, 0)$ e que divide o retângulo em dois trapézios de mesma área. Determine a equação que representa essa reta.



Resolução: A equação geral que representa a reta é dada por:

$$y = m(x - L),$$

onde m é o coeficiente angular da reta, que devemos encontrar.

Vamos considerar dois pontos, x_1 e x_2 como indicados na figura acima, dados por:

$$x_1 = L + a \qquad \text{e} \qquad x_2 = 3L - a,$$

uma vez que os dois trapézios tem a mesma área. Substituindo esses ponto na equação da reta, obtemos

$$L = m(L + a - L) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ma = L.$$

$$2L = m(3L - a - L) \quad \Longleftrightarrow \quad 2L = 2Lm - ma \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{3}{2}.$$

Portanto, a reta que divide o retângulo em dois trapézios de mesma área é representada pela seguinte equação

$$y = \frac{3}{2}(x - L),$$

e os pontos x_1 e x_2 são dados por:

$$x_1 = L + \frac{2L}{3} = \frac{5L}{3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = 3L - \frac{2L}{3} = \frac{7L}{3}.$$

Questão 4 **20 pontos**

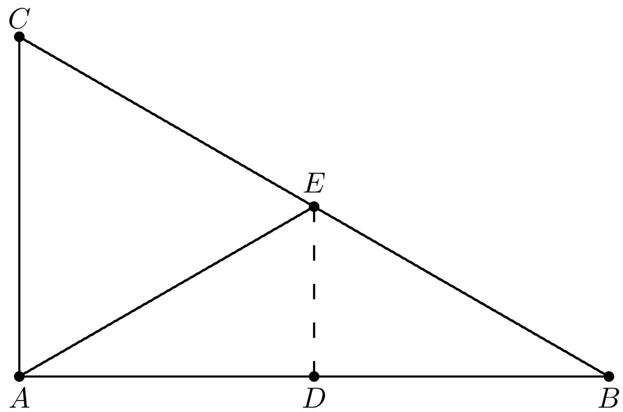
Num triângulo ABC, o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 30^o e o ângulo $A\widehat{C}B$ mede 60^o. Seja E um ponto sobre o lado BC tal que $\overline{AC} = \overline{CE}$.

(a) *Mostre que o triângulo ABE é isósceles e que o triângulo ACE é equilátero.*

(b) *Determine a área do triângulo ABC em função do comprimento do segmento AE.*

Resolução

Na figura abaixo temos a ilustração do problema descrito acima. O triângulo ABC é um triângulo retângulo, uma vez que o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 30^o e o ângulo $A\widehat{C}B$ mede 60^o, logo o ângulo $B\widehat{A}C$ mede 90^o.



Vamos analisar primeiramente o triângulo ACE. Como por hipótese $\overline{AC} = \overline{CE}$, temos que o ângulo $A\widehat{E}C$ e o ângulo $C\widehat{A}E$ são iguais. Desse modo, temos $C\widehat{A}E = A\widehat{E}C = 60^o$, uma vez que o ângulo $A\widehat{C}B$ mede 60^o. Portanto, o triângulo ACE é equilátero.

Agora vamos analisar o triângulo ABE. Como o ângulo $A\widehat{E}C = 60^o$ e o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 30^o, temos que o ângulo $B\widehat{A}E = 30^o$, uma vez que o ângulo $A\widehat{E}B = 120^o$. Desse modo, o triângulo ABE é isósceles, com $\overline{AE} = \overline{BE}$.

Finalmente, vamos calcular a área do triângulo ABC. Sabemos que $\overline{AC} = \overline{AE}$, uma vez que o triângulo ACE é equilátero. Assim, basta calcular o comprimento do segmento AB em função de $\overline{AE}$, considerando $\overline{AC}$ a altura do triângulo ABC com relação à base AB.

Note que $\overline{AB} = 2 \times \overline{AD}$, e que o comprimento do segmento AD é dado por:

$$\overline{AD} = \overline{AE} \times cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AE} \, ,$$

uma vez que ADE é um triângulo retângulo. Assim, a área do triângulo ABC é dada por:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times (\,\overline{AE}\,)^2 \, .$$

Questão 5 ***20 pontos***

(a) *Determine os valores do parâmetro* λ *de modo que o sistema linear*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

admita soluções não–nulas, isto é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(b) *Escolha um parâmetro* λ *encontrado no item (a), e determine o conjunto solução do sistema linear acima.*

Resolução

Podemos observar que o sistema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é um sistema linear homogêneo. Assim, para que o sistema linear homogêneo admita soluções não–nulas devemos impor que o $\det(A) = 0$, onde A é a matriz do sistema linear que depende do parâmetro λ. Desse modo, impondo essa condição tem–se

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0$$

Com algumas manipulações algébricas no polinômio acima, obtemos

$$(1-\lambda)(\,(1-\lambda)^2 - 1\,) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0$$

Portanto, temos que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$, são os valores do parâmetro λ que faz com que o sistema linear homogêneo admita soluções não–nulas.

Para $\lambda = 0$, temos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad \alpha \in I\!R\,.$$

Para $\lambda = 1$, temos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad \alpha \in I\!R\,.$$

Para $\lambda = 2$, temos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad \alpha \in I\!R\,.$$

Questão 6 ***20 pontos***

Seja $Q = [q_{ij}]$ *uma matriz real quadrada de ordem* n. *Dizemos que* Q *é uma* ***matriz ortogonal*** *se* $Q^tQ = I_n$, *onde* I_n *é a matriz identidade de ordem* n.

(a) Mostre que $Q^t = Q^{-1}$.

(b) Mostre que $det(Q) = \pm 1$.

(c) Determine como podemos representar as matrizes ortogonais de ordem 2.

(d) Exiba uma matriz ortogonal de ordem 2 *e calcule o seu determinante.*

Resolução

(a) Tomando a definição de matriz ortogonal, tem–se

$$Q^tQ = I_n \iff Q^tQQ^t = I_nQ^t \iff Q^t(\,QQ^t\,) = Q^t \iff QQ^t = I_n \,.$$

Desse modo, obtemos $Q^tQ = QQ^t = I_n$. Portanto, mostramos que $Q^t = Q^{-1}$.

(b) Tomando a definição de matriz ortogonal e fazendo uso das propriedades de determinante, obtemos

$$\det(Q^tQ) = \det(Q^t)\det(Q) = \det(Q)\det(Q) = \det(Q)^2 = \det(I_n) = 1 \,.$$

Desse modo, temos que

$$\det(Q)^2 = 1 \iff \det(Q) = \pm 1 \,.$$

(c) Considerando um matriz genérica Q de ordem 2 dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,.$$

Considerando que $\det(Q) = 1$, de acordo com o item (b), sabemos que a inversa da matriz Q é da seguinte forma:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \,.$$

Fazendo $Q^t = Q^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \iff d = a \quad \text{e} \quad c = -b \,.$$

Portanto, para $\det(Q) = 1$, temos que

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \,.$$

Finalmente, considerando que $Q^tQ = I_2$, obtemos a condição $a^2 + b^2 = 1$.

Considerando que $\det(Q) = -1$, de acordo com o item (b), sabemos que a inversa da matriz Q é da seguinte forma:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} .$$

Fazendo $Q^t = Q^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d = -a \qquad \text{e} \qquad c = b \ .$$

Portanto, para $\det(Q) = -1$, temos que

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} .$$

Finalmente, considerando que $Q^tQ = I_2$, obtemos a condição $a^2 + b^2 = 1$.

Portanto, mostramos que uma matriz ortogonal de ordem 2 deve ser de uma das formas:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

com a condição $a^2 + b^2 = 1$.

(d) Considerando, por exemplo,

$$a = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

que satisfazem a condição $a^2 + b^2 = 1$, temos as duas possibilidades para uma matriz ortogonal de ordem 2:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$