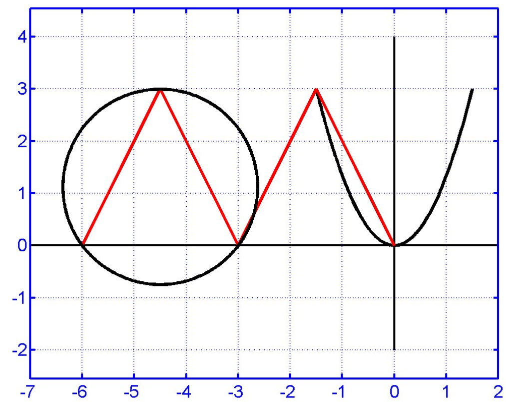
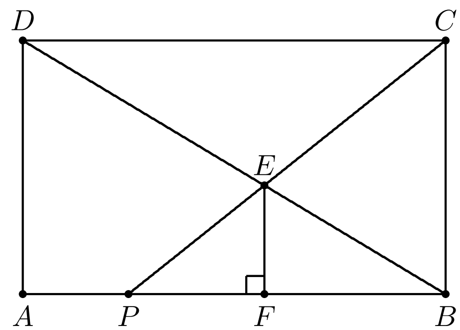


Gabarito da Prova da Terceira Fase – Nível Beta

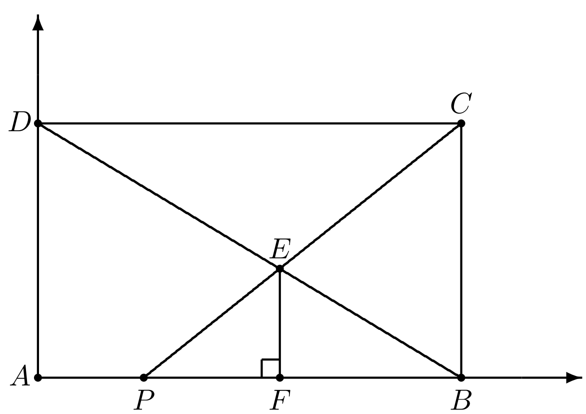
Questão 1 ***20 pontos***

Na figura abaixo temos um retângulo $ABCD$ cujos lados AB e BC medem $70\,cm$ e $42\,cm$, respectivamente, e o segmento AP mede um quarto do comprimento do lado AB. O ponto E é a intersecção do segmento CP com a diagonal BD. Determine a distância do ponto E ao lado AB, isto é, determine o comprimento do segmento EF.



Resolução

Podemos resolver o problema geométrico descrito acima com argumentos de Geometria Analítica. Para isso, introduzimos no plano cartesiano um sistema de coordenadas que seja conveniente para a resolução do nosso problema, como ilustra a figura abaixo.



Nesse sistema de coordenadas a origem é o ponto $A = (0,0)$. Desse modo, os outros pontos têm as seguintes coordenadas

$$B = (70,0) \quad , \quad C = (70,42) \quad , \quad D = (0,42) \quad \text{e} \quad P = \left(\frac{35}{2}\,,0\right) \,,$$

de acordo com as informações fornecidas no problema.

Para determinar as coordenadas do ponto E, vamos escrever a equação da reta r que passa pelos ponto D e B, que é dada por:

$$r: \; y = -\frac{42}{70}(x - 70) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r: \; y = -\frac{3}{5}x + 42 \,,$$

e a equação da reta s que passa pelos ponto C e P, que é dada por:

$$s: \; y = \frac{84}{105}\left(x - \frac{35}{2}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad s: \; y = \frac{4}{5}x - 14 \,.$$

O ponto E é obtido fazendo a intersecção das retas r e s, que fornece a seguinte equação

$$-\frac{3}{5}x + 42 = \frac{4}{5}x - 14 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{7}{5}x = 56 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 40 \,.$$

Substituindo $x = 40$ na equação da reta r, ou na equação da reta s, obtemos $y = 18$. Assim, o ponto E tem as seguintes coordenadas $E = (40, 18)$.

Portanto, a distância do ponto E ao lado AB, ou o comprimento do segmento EF, é igual a $\overline{EF} = 18$ centímetros.

Podemos também resolver o problema geométrico através de semelhança de triângulos. Utilizando o fato que os triângulos PBC e PFE são semelhantes, obtemos a seguinte relação

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PF}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{42}{\overline{EF}} = \frac{210}{4\overline{PF}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 210\overline{EF} = 168\overline{PF} \,,$$

uma vez que $\overline{BP}$ é igual a três quartos de $\overline{AB} = 70$. Desse modo, obtemos a equação

$$210\overline{EF} = 168\overline{PF} \,.$$

Como os triângulos ABD e FBE são semelhantes, obtemos a seguinte relação

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FB}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{42}{\overline{EF}} = \frac{280}{210 - 4\overline{PF}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 280\overline{EF} = 8820 - 168\overline{PF} \,,$$

uma vez que $\overline{FB}$ é igual a

$$\overline{FB} = \frac{3}{4}\overline{AB} - \overline{PF} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{FB} = \frac{210}{4} - \overline{PF} = \frac{210 - 4\overline{PF}}{4} \,.$$

Desse modo, temos a equação

$$280\overline{EF} = 8820 - 168\overline{PF} \,.$$

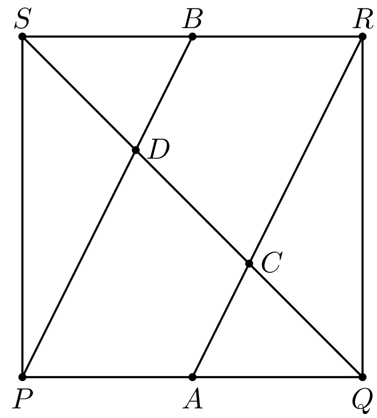
Substituindo $168\overline{PF} = 210\overline{EF}$ na equação acima, obtemos

$$280\overline{EF} = 8820 - 210\overline{EF} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 490\overline{EF} = 8820 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{EF} = 18 \,.$$

Portanto, a distância do ponto E ao lado AB, ou o comprimento do segmento EF, é igual a $\overline{EF} = 18$ centímetros.

Questão 2 ***20 pontos***

Na Figura abaixo $PQRS$ é um quadrado cujo lado mede L centímetros, onde A é o ponto médio do lado PQ e B é o ponto médio do lado RS. Determine a área do trapézio $PACD$.



Resolução

Sejam

$A_\square$: área do quadrado $PQRS$

A_1 : área do triângulo retângulo AQR

A_2 : área do triângulo retângulo BSP

A_3 : área do trapézio $PACD$

A_4 : área do trapézio $RBDC$

Como os triângulos retângulos AQR e BSP são congruentes, uma vez que

$$\overline{AQ} = \overline{BS} \quad , \quad \overline{QR} = \overline{SP} \, ,$$

e os ângulos $\widehat{AQB} = \widehat{BSP} = 90^o$, suas áreas são iguais, isto é, $A_1 = A_2$.

De mesmo modo, os trapézios $PACD$ e $EBDC$ são congruentes, uma vez que

$$\overline{PA} = \overline{RB} \quad , \quad \overline{AC} = \overline{BD} \quad , \quad \overline{CD} = \overline{DC} \quad , \quad \overline{DP} = \overline{CR} \, ,$$

e os ângulos

$$\widehat{PAC} = \widehat{RBD} \quad , \quad \widehat{ACD} = \widehat{BDC} \qquad \text{e} \qquad \widehat{CDP} = \widehat{DCR} \, ,$$

suas áreas são iguais, isto é, $A_3 = A_4$.

Assim, a área A_3 do trapézio $PACD$ é dada por:

$$A_3 = A_{\square} - A_1 - A_2 - A_4 = A_{\square} - 2A_1 - A_3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2A_3 = A_{\square} - 2A_1 \,.$$

Note que a área A_1 do triângulo retângulo AQR é dada por:

$$A_1 = \frac{L^2}{4} = \frac{A_{\square}}{4} \,,$$

uma vez que A é o ponto médio do lado PQ.

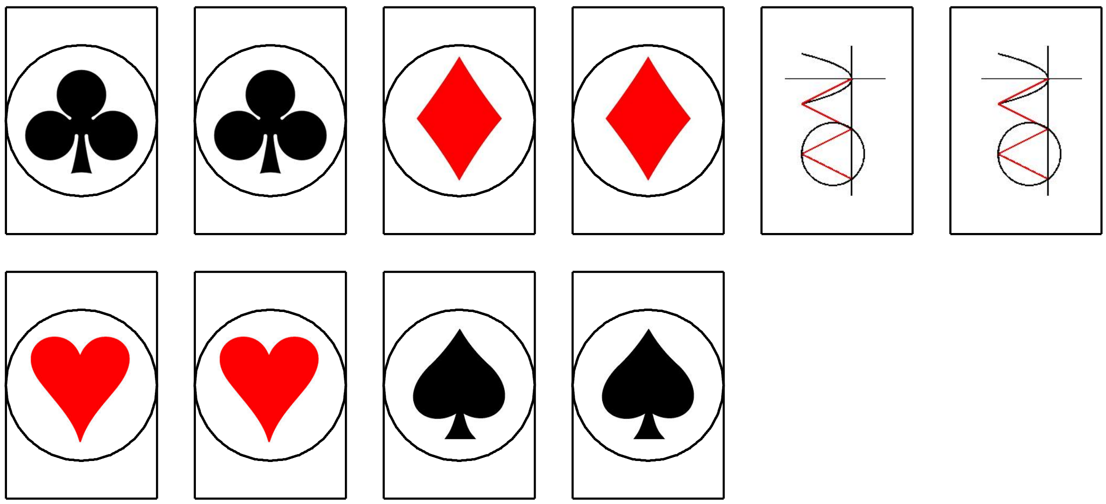
Desse modo, temos

$$2A_3 = A_{\square} - \frac{A_{\square}}{2} = \frac{A_{\square}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad A_3 = \frac{A_{\square}}{4} = \frac{L^2}{4}\, cm^2 \,.$$

Portanto, a área do trapézio $PACD$ é um quarto da área do quadrado $PQRS$.

Questão 3 ***20 pontos***

No ***Jogo da Memória*** *com cinco pares de cartas, como ilustra a figura abaixo, determine a probabilidade do jogador que iniciar a partida acertar todos os cinco pares em uma única jogada.*



Resolução

Na escolha do primeiro par, digamos que a carta retirada seja o naipe de **espada**, restando 9 cartas. Assim, o jogador terá uma chance em nove para tirar a outra carta com o naipe de **espada**. Desse modo, a probabilidade de retirar a carta com o naipe de **espada**, que vamos denotar por P_1, é dada por:

$$P_1 = \frac{1}{9}\,.$$

Restando agora oito cartas.

Na escolha do segundo par, digamos que a carta retirada seja o naipe de **copa**, restando 7 cartas. Assim, o jogador terá uma chance em sete para tirar a outra carta com o naipe de **copa**. Desse modo, a probabilidade de retirar a carta com o naipe de **copa**, que vamos denotar por P_2, é dada por:

$$P_2 = \frac{1}{7}\,.$$

Restando agora seis cartas.

Na escolha do terceiro par, digamos que a carta retirada seja o naipe de **pau**, restando 5 cartas. Assim, o jogador terá uma chance em cinco para tirar a outra carta com o naipe de **pau**. Desse modo, a probabilidade de retirar a carta com o naipe de **pau**, que vamos denotar por P_3, é dada por:

$$P_3 = \frac{1}{5}\,.$$

Restando agora quatro cartas.

Na escolha do quarto par, digamos que a carta retirada seja o naipe de **ouro**, restando 3 cartas. Assim, o jogador terá uma chance em três para tirar a outra carta com o naipe de **ouro**. Desse modo, a probabilidade de retirar a carta com o naipe de **ouro**, que vamos denotar por P_4, é dada por:

$$P_4 = \frac{1}{3} .$$

Restando agora duas cartas, que são as cartas com o logotipo da OMU, terminando o jogo da memória.

Desse modo, a probabilidade do jogador acertar todos os pares em uma única jogada, que vamos denotar por P, é dada por:

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{945} .$$

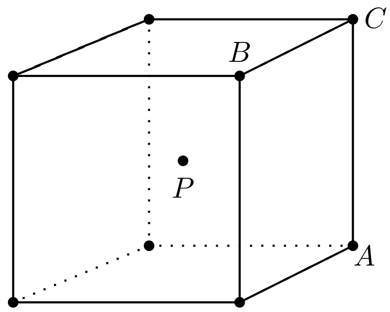
Portanto, o jogador tem uma chance em 945 para acertar todos os pares em uma única jogada.

Questão 4 ***20 pontos***

Na figura abaixo temos um cubo de aresta medindo L metros, os vértice A, B e C, e o ponto P, que é o centro do cubo.

(a) *Determine a área do triângulo APB.*

(b) *Determine a relação entre as áreas dos triângulos APB e APC.*



Resolução

(a) O triângulo APB é um triângulo isósceles, cuja base AB e a diagonal de uma das faces do cubo, de aresta medindo L centímetros. Assim, temos $\overline{AB} = L\sqrt{2}$.

Como P é o centro do cubo, a altura h relativa a base AB do triângulo APB é dada por:

$$h = \frac{L}{2} \,,$$

que é exatamente a distância do ponto P a face do cubo que contém a base AB.

Portanto, a área do triângulo isósceles APB, que vamos denotar por A_1, é dada por:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} L^2 \, cm^2 \,.$$

(b) O triângulo APC é um triângulo isósceles, cuja base AC e uma aresta do cubo, medindo L centímetros. Assim, temos $\overline{AC} = L$.

Os lados AP e PC estão em diagonais do cubo. Como P é o centro do cubo, temos $\overline{AP}$ e $\overline{PC}$ mede a metade do comprimento da diagonal do cubo, isto é,

$$\overline{AP} = \overline{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}L \,,$$

uma vez que uma diagonal do cubo mede $\sqrt{3}L$, pois a diagonal do cubo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem L, comprimento de uma aresta do cubo, e $\sqrt{2}L$, comprimento da diagonal de uma face do cubo.

Assim, a altura h relativa a base AC é dada por:

$$h^2 = \frac{3}{4}L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{2}{4}L^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{2}}{2}L \,.$$

Desse modo, a área do triângulo isósceles APC, que vamos denotar por A_2, é dada por:

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}L^2\,cm^2 \,.$$

Portanto, a relação entre as áreas dos triângulos APB e APC é igual a 1.

Questão 5 ***20 pontos***

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos como sendo um ***valor próprio*** *da matriz A a uma raíz da equação polinomial*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0 ,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Considere a matriz quadrada A de ordem 3 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Determine a soma dos valores próprios da matriz A.

(b) Determine o produto dos valores próprios da matriz A.

Resolução

A equação polinomial associada a matriz A é dada por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0 .$$

Com uma pequena manipulação algébrica, obtemos

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) + 2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 .$$

Da equação acima, temos as equações

$$1 - \lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 .$$

Da primeira equação obtemos uma raíz da equação polinomial dada por $\lambda_1 = 0$. A segunda equação possui as seguintes raízes

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} .$$

Assim, temos mais duas raízes da equação polinomial dadas por:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \qquad \text{e} \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i .$$

Desse modo, os valores próprios da matriz A são dados por:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \qquad \text{e} \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \, .$$

Portanto, a soma dos valores próprios da matriz A é dada por:

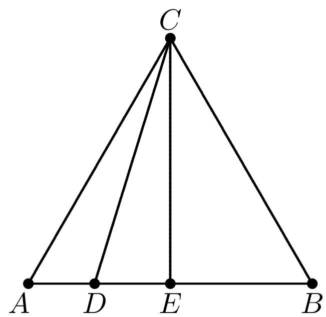
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \, ,$$

e o produto é dado por:

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i \right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2 \, .$$

Questão 6 ***20 pontos***

Na Figura abaixo ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede L centímetros, o ponto D pertence ao segmento AE e E é o ponto médio do lado AB.



(a) *Considere que as áreas dos triângulos ADC, DEC e EBC estão numa progressão aritmética, nessa ordem. Determine o comprimento do segmento AD, em função de L, e a razão da progressão aritmética.*

(b) *Considere que as áreas dos triângulos ADC, DEC e EBC estão numa progressão geométrica, nessa ordem. Determine o comprimento do segmento AD, em função de L, e a razão da progressão geométrica.*

Resolução

Sejam

$$A_1 : \text{ área do triângulo } ADC$$
$$A_2 : \text{ área do triângulo } DEC$$
$$A_3 : \text{ área do triângulo } EBC$$

que são dadas por:

$$A_1 = \frac{xh}{2} \quad , \quad A_2 = \frac{h}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{hL}{4}$$

onde cada um dos triângulos têm a mesma altura h, e $x = \overline{AD}$.

(a) Como as áreas dos triângulos ADC, DEC e EBC estão numa progressão aritmética, nessa ordem, de razão $r > 0$, temos

$$A_3 - A_2 = A_2 - A_1 = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_3 + A_1 = 2A_2 \, .$$

Desse modo, temos a seguinte equação

$$\frac{hL}{4} + \frac{xh}{2} = h\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3x}{2} = \frac{L}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{L}{6} \, .$$

Portanto, o comprimento do segmento AD é dado por:

$$\overline{AD} = \frac{L}{6} \, .$$

Assim, a razão r da progressão aritmética é dada por:

$$r = A_2 - A_1 \iff r = \frac{h}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{6}\right) - \frac{Lh}{12} \iff r = \frac{Lh}{12} .$$

Considerando a altura h do triângulo equilátero ABC, obtemos

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}L .$$

Portanto, a razão da progressão aritmética é dada por:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{24}L^2 .$$

(b) Como as áreas dos triângulos ADC, DEC e EBC estão numa progressão geométrica, nessa ordem, de razão $q > 0$, temos

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_2}{A_1} = q \iff A_1 \times A_3 = (A_2)^2 .$$

Desse modo, obtemos uma equação quadrática em x dada por:

$$\frac{xLh^2}{8} = \frac{h^2}{4}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 \iff \frac{xL}{8} = \frac{L^2}{16} - \frac{Lx}{4} + \frac{x^2}{4} \iff 2x^2 - 3Lx + \frac{L^2}{2} = 0 .$$

As soluções da equação quadrática acima são dadas por:

$$x = \frac{3L \pm \sqrt{9L^2 - 4L^2}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}L$$

Portanto, a solução que tem o significado geométrico desejado é dada por:

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}L .$$

Portanto, o comprimento do segmento AD é dado por:

$$\overline{AD} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}L .$$

Note que a outra solução deve ser descartada, pois

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{4} > 1$$

fazendo com que o ponto D fique fora do segmento AB.

A razão da progressão geométrica pode ser calculada da seguinte forma:

$$q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{hL}{8}(\sqrt{5} - 1) \times \frac{8}{hL(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \, ,$$

que com uma pequena manipulação algébrica, obtemos

$$q = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \, .$$

Portanto, a razão da progressão geométrica é dada por:

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \, .$$