Gabarito da Prova da Segunda Fase – Nível Beta

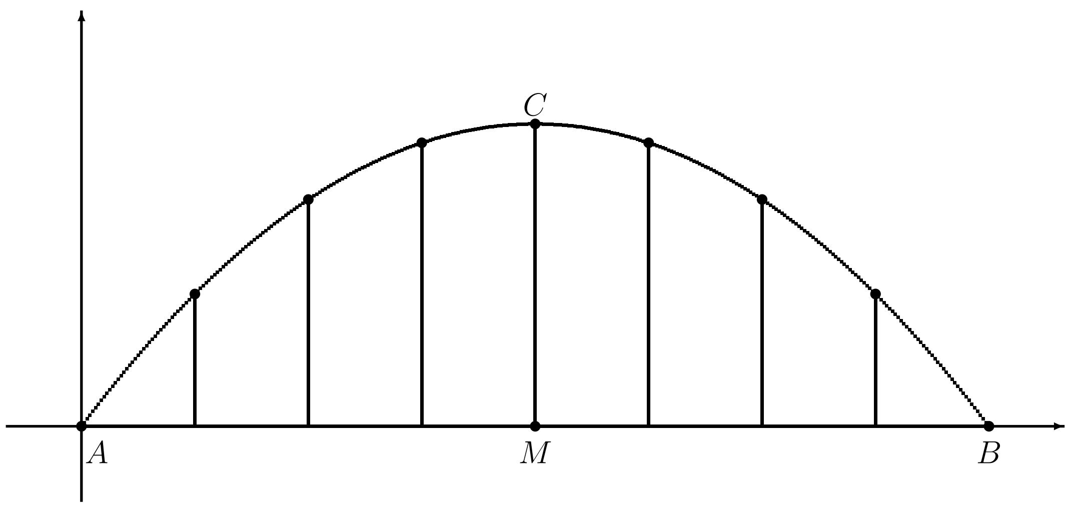
Questão 1 ***20 pontos***

Um construtor deseja confeccionar o telhado de um galpão na forma de uma parabola apoiado na viga horizontal AB por colunas verticais com espaçamento de um metro e meio entre elas, como ilustra a figura abaixo.

Sabendo que a viga AB mede 12 metros de comprimento, que M é o ponto médio da viga AB e que a coluna vertical MC mede quatro metros, determine as medidas das outras colunas de modo que o telhado apoiado nelas tenha o formato parabólico como deseja o construtor.

Resolução

Vamos representar o problema descrito acima no sistema de coordenadas cartesianas, como ilustra a figura abaixo, colocando a origem do sistema de coordenadas na extremidade A da viga.



Desse modo, os pontos de referências na figura, têm as seguintes coordenadas:

$$A = (0,0) \quad , \quad B = (12,0) \quad , \quad C = (6,4) \quad , \quad M = (6,0) \; .$$

Sabemos que a representação do gráfico de uma função quadrática, no plano cartesiano, é uma parabola. Assim, da figura acima, temos que os pontos $A = (0,0)$ e $B = (12,0)$ são dois zeros de uma função quadrática $f : [0,12] \longrightarrow I\!R$ que podemos escrever da forma:

$$f(x) = \alpha x(L - x) \; ,$$

uma vez que a concavidade da parabola está voltada para baixo.

O parâmetro α é determinado sabendo que $f(6) = 4$, assim temos

$$f(6) = 36\alpha = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{9} \; .$$

Desse modo, a função quadrática, cujo gráfico represente a forma parabólica do telhado do galpão, é dada por:

$$f(x) = \frac{x(12 - x)}{9} .$$

As colunas de sustentação, que devemos calcular as medidas, estão nas seguintes coordenadas

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_3 = \frac{9}{2} \quad , \quad x_4 = \frac{15}{2} \quad , \quad x_5 = 9 \qquad \text{e} \qquad x_6 = \frac{21}{2} .$$

Note as colunas x_1, x_2, x_3 estão à esquerda do eixo de simetria e as colunas x_4, x_5, x_6 estão à direita do eixo de simetria. Assim, denotando por V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 as medidas das colunas, temos

$$V_3 = V_4 = 3,75\,m \quad , \quad V_2 = V_5 = 3,0\,m \qquad \text{e} \qquad V_1 = V_6 = 1,75\,m .$$

Questão 2 ***20 pontos***

Definição 1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos* **potenciação** *para expoentes naturais da seguinte forma:*

$$A^0 = I_n \quad , \quad A^1 = A \quad , \quad A^2 = AA \qquad e \qquad A^{k+1} = AA^k \, ,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Definição 2 *Seja R uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que R é uma matriz* ***auto–reflexiva*** *se $R^2 = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.*

Definição 3 *Seja P uma matriz real quadrada de ordem n. Dizemos que P é uma matriz* ***idempotente*** *se $P^2 = P$.*

(a) Seja R uma matriz auto–reflexiva de ordem n. Determine os valores dos parâmetros α e β de modo que a matriz $P = \alpha R + \beta I_n$ seja uma matriz idempotente.

(b) Mostre que a matriz R definida da forma:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

é auto–reflexiva e escreva explicitamente a matriz idempotente $P = \alpha R + \beta I_2$.

Resolução
(a) Vamos calcular as expressão P^2 em função dos parâmetros α e β.

$$P^2 = (\alpha R + \beta I_n)(\alpha R + \beta I_n) = \alpha^2 R^2 + 2\alpha\beta R + \beta^2 I_n = (\alpha^2 + \beta^2) I_n + 2\alpha\beta R \, ,$$

uma vez que $R^2 = I_n$.

Impondo a condição que $P^2 = P$, temos

$$(\alpha^2 + \beta^2) I_n + 2\alpha\beta R = \alpha R + \beta I_n \, ,$$

obtemos as seguintes equações nos parâmetros α e β:

$$2\alpha\beta = \alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \beta \, .$$

Da primeira equação temos $\beta = \dfrac{1}{2}$, que substituindo na segunda equação, obtemos

$$\alpha^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \pm\frac{1}{2} \, .$$

Assim, temos duas possibilidades para a matriz P, que são dadas por:

$$P = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I_n \qquad \text{e} \qquad P = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}I_n \,.$$

(b) Vamos mostrar que a matriz R é auto–reflexiva, isto é, $R^2 = I_2$.

$$R^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & \frac{12}{25} - \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} - \frac{12}{25} & \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente vamos escrever explicitamente a expressão da matriz idempotente

$$P = \alpha R + \beta I_2 \qquad \text{para} \qquad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = \pm\frac{1}{2} \,.$$

Assim, temos

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \,.$$

e

$$P = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \,.$$

Questão 3 ***20 pontos***

Definição 4 *Denomina–se* ***Progressão Harmônica*** *uma sequência de números reais não nulos tais que os inversos de seus termos formam uma Progressão Aritmética.*

Definição 5 *Denomina–se* ***Média Harmônica*** *entre números reais não nulos como sendo o inverso da média aritmética do inverso desses números reais. Por exemplo, a Média Harmônica entre os números reais não nulos a, b, c é dada por:*

$$M_h = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \right)^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M_h = \frac{3abc}{bc + ac + ab} ,$$

onde M_h denota a média harmônica.

(a) *Se os três primeiros termos de uma progressão harmônica são $12, 6, 4$, determine o seu oitavo termo.*

(b) *Escreva a expressão para o termo geral de uma Progressão Harmônica, cuja progressão aritmética formada pelos inversos de seus termos tem a_1 como primeiro termo e r como a razão dessa PA.*

(c) *Considere que os números reais $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ formam uma progressão harmônica. Mostre que cada termo da progressão harmônica é a média harmônica de seus vizinhos imediatos, isto é, o termo h_n é a média harmônica entre os termos h_{n-1} e h_{n+1}.*

(d) *Uma família de professores de matemática em viagem de férias realizou o trajeto entre as cidades de Campinas e Bebedouro, desenvolvendo uma velocidade média de 90 quilômetros por hora na ida, e uma velocidade média de 110 quilômetros por hora no retorno. Determine a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta.*

Resolução

(a) Sabendo que os três primeiros termos de uma progressão harmônica são

$$h_1 = 12 \quad , \quad h_2 =, 6 \quad , \quad h_3 = 4 ,$$

temos

$$a_1 = \frac{1}{12} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{6} \qquad \text{e} \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad ,$$

são os três primeiros termos de uma Progressão Aritmética. Desse modo, a razão dessa PA é dada por:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \frac{1}{12} .$$

Assim, o oitavo termo dessa PA é dado por:

$$a_8 = a_1 + 7 \times r = \frac{1}{12} + 7 \times \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} .$$

Portanto, o oitavo termo da progressão harmônica será dado por:

$$h_8 = \frac{1}{a_8} = \frac{3}{2} .$$

(b) Considere uma Progressão Harmônica cuja progressão aritmética formada pelos inversos de seu termos tem a_1 como primeiro termo e r a sua razão. Assim, o termo geral da PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r \,.$$

Portanto, o termo geral da progressão harmônica é dado por:

$$h_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 + (n-1) \times r} = \frac{1}{\dfrac{1}{h_1} + (n-1) \times r} = \frac{h_1}{1 + (n-1) \times h_1 \times r} \,.$$

(c) Considerando que os números reais $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ formam uma progressão harmônica e que r seja a razão da progressão aritmética formada pelos dos inversos de seus termos, temos

$$\frac{1}{h_n} = \frac{1}{h_1} + (n-1) \times r \quad , \quad \frac{1}{h_{n-1}} = \frac{1}{h_1} + (n-2) \times r \quad \text{e} \quad \frac{1}{h_{n+1}} = \frac{1}{h_1} + n \times r \,.$$

Fazendo

$$\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}} = \frac{1}{h_1} + (n-2) \times r + \frac{1}{h_1} + n \times r = \frac{2}{h_1} + (2n-2) \times r = \frac{2}{h_n} \,,$$

obtemos

$$\frac{\dfrac{1}{h_{n-1}} + \dfrac{1}{h_{n+1}}}{2} = \frac{1}{h_n} \quad \Longleftrightarrow \quad h_n = \left(\frac{\dfrac{1}{h_{n-1}} + \dfrac{1}{h_{n+1}}}{2} \right)^{-1} \,,$$

provando que o termo h_n é a média harmônica entre os termos h_{n-1} e h_{n+1}.

(d) Considere que a distância entre as cidades de Campinas e Bebedouro seja de d quilômetros. Vamos denotar por T_i o tempo gasto na viagem de ida e por T_v o tempo gasto para a viagem de volta. Desse modo, temos que

$$T_i = \frac{d}{90} \quad \text{e} \quad T_v = \frac{d}{110} \,.$$

Desse modo, o tempo médio para fazer o percurso de ida e volta é dado por:

$$T_m = \frac{T_i + T_v}{2} = \frac{\dfrac{d}{90} + \dfrac{d}{110}}{2} \,.$$

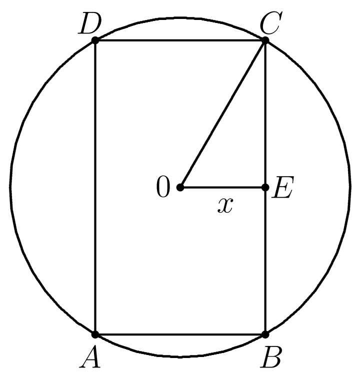
Assim, a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta é dada por:

$$V_m = \frac{d}{T_m} = \frac{d}{\dfrac{\dfrac{d}{90} + \dfrac{d}{110}}{2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{110}} = \left(\frac{\dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{110}}{2} \right)^{-1} = 99 \,.$$

Portanto, a velocidade média para realizar todo o percurso de ida e volta é de 99 quilômetros por hora, que é a média harmônica entre a velocidade de ida a velocidade e de volta.

Questão 4 ***20 pontos***

(a) Considere um retângulo $ABCD$ inscrito numa circunferência cujo raio mede quatro centímetros, como ilustra a figura abaixo.



Determine a área do retângulo $ABCD$ em termos de $x = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

(b) Considere um cilindro circular reto inscrito numa esfera de raio igual a quatro centímetros. Seja r a medida, em centímetros, do raio da base do cilindro.

1. *Determine o volume do cilindro em função de r.*
2. *Determine quantos cilindros circulares retos de volume igual a $\sqrt{60}\pi$ centímetros cúbicos podem ser inscritos numa esfera de raio igual a quatro centímetros.*

Resolução

(a) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $0EC$ temos

$$4^2 = x^2 + \frac{L^2}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L = \sqrt{64 - 4x^2}\,,$$

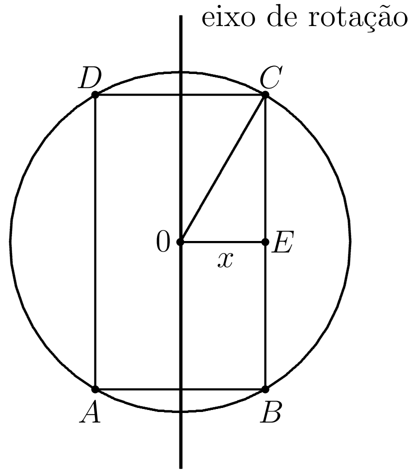
onde estamos denotando por L o comprimento dos lados BC e AD do retângulo.

Assim, a área do retângulo $ABCD$, que vamos denotar por A_r, é dada por:

$$A_r = 2x\sqrt{64 - 4x^2}\,,$$

uma vez que $\overline{AB} = \overline{CD} = 2x$.

(b) Girando a figura abaixo em torno do eixo de rotação, teremos um cilindro inscrito em uma esfera de raio igual a quatro centímetros, onde o raio da base do cilindro é $r = x = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.



Assim, o volume do cilindro em função do raio da base é dado por:

$$V_c(r) = \pi r^2 \sqrt{64 - 4r^2} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq r \leq 4 .$$

Finalmente, vamos determinar quantos cilindros circulares retos de volume igual a $\sqrt{60}\pi$ centímetros cúbicos podem ser inscritos nesse esfera. Para isso, teremos que encontrar as soluções, geometricamente viável, da seguinte equação:

$$\pi r^2 \sqrt{64 - 4r^2} = \pi\sqrt{60} \qquad \text{para} \qquad 0 \leq r \leq 4 .$$

Fazendo a mudança de variável $\omega = r^2$, obtemos

$$\pi \omega \sqrt{64 - 4\omega} = \pi\sqrt{60} \iff \omega^2(64 - 4\omega) = 60 \iff -\omega^3 + 16\omega - 15 = 0 .$$

Podemos verificar facilmente que $\omega = 1$ é uma solução da equação acima, isto é, $\omega = 1$ é um zero do polinômio $p(\omega) = -\omega^3 + 16\omega - 15$.

Fatorando o polinômio p, obtemos

$$p(\omega) = -\omega^3 + 16\omega - 15 = (\omega - 1)(-\omega^2 + 15\omega + 15) ,$$

Assim, obtemos os outras zeros do polinômio p encontrando as soluções da equação quadrática $-\omega^2 + 15\omega + 15 = 0$, que são dadas por:

$$\omega = \frac{15 \pm \sqrt{285}}{2} .$$

Desse modo, a outra solução possível para ω é dada por:

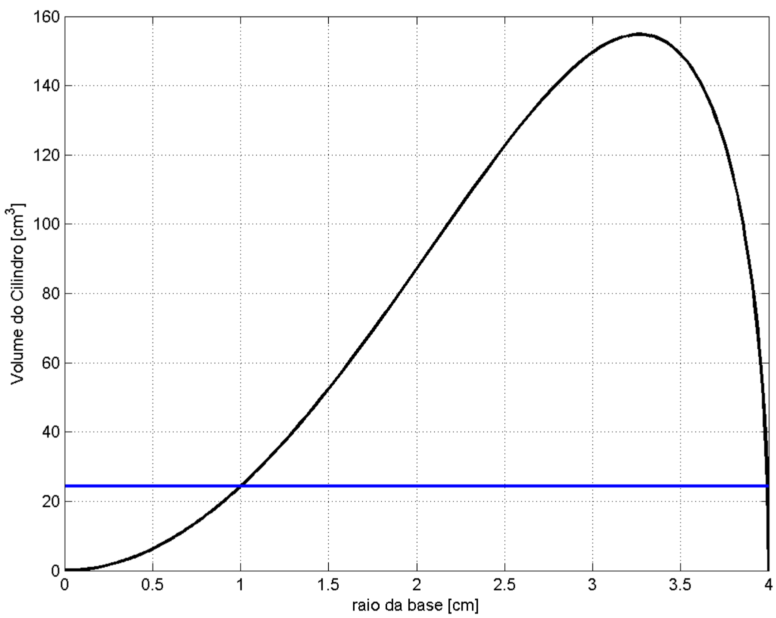
$$\omega = \frac{15 + \sqrt{285}}{2},$$

uma vez que $\sqrt{285} > 15$.

Portanto, temos somente dois cilindros de volume igual a $\pi\sqrt{60}$ inscritos na esfera de raio igual a quatro centímetros, cujos raios são:

$$r_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad r_2 = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{285}}{2}} \approx 3,9926 .$$

Na figura abaixo temos o gráfico do volume do cilindro em função do raio da base. Observe que o gráfico da reta horizontal, $y = \sqrt{60}\,\pi$, corta o gráfico do volume do cilindro em dois pontos.



Questão 5 ***20 pontos***

Definição 6 *Definimos a* ***Distância*** *entre os pontos* $P = (x_1\,,\,y_1)$ *e* $Q = (x_2\,,\,y_2)$*, que vamos denotar por* $d(P,Q)$*, no plano numérico da seguinte forma:*

$$d(P,Q) \;=\; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\;.$$

(a) Dados os pontos $P = (2,4)$ *e* $B = (4\,,\,b)$*, determine o(s) valor(es) do parâmetro* b *de modo que* $d(P,B) = \sqrt{5}\,.$

(b) Dado o ponto $P = (2,4)$ *e a reta* r *representada pela equação*

$$2x + y = 4\,,$$

determine o ponto Q *pertencente a reta* r *que está mais próximo do ponto* P*.*

Resolução
(a) Sabemos que a distância entre os pontos P e B é dada da seguinte forma:

$$d(P,B) \;=\; \sqrt{(4-2)^2 + (b-4)^2} \;=\; \sqrt{b^2 - 8b + 20}\;.$$

Assim, para $d(,P,B) = \sqrt{5}$, temos que resolver a equação no parâmetro b dada por:

$$\sqrt{b^2 - 8b + 20} = \sqrt{5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^2 - 8b + 20 = 5\,,$$

uma vez que o argumento da raíz quadrada é sempre positivo, temos a seguinte equação quadrática em b:

$$b^2 - 8b + 15 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}\,,$$

que admite as seguintes soluções $b_1 = 5$ e $b_2 = 3$.

Desse modo, os pontos $B_1 = (4,5)$ e $B_2 = (4,3)$ satisfazem a condição

$$d(P,B_1) = \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad d(P,B_2) = \sqrt{5}\,.$$

Observe que os pontos da forma $B = (4,b)$ estão sobre a reta vertical t representada pela equação $x = 4$, como ilustra a figura abaixo.

(b) Considerando o ponto $P = (2,4)$ e a reta r representada pela equação

$$2x + y = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 4 - 2x\,,$$

temos que todo ponto $Q \in r$ é escrito da forma $Q = (x\,,\,4-2x)$. Assim, a distância do ponto P a qualquer ponto da reta r é escrita da forma:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (4-2x-4)^2} = \sqrt{5x^2 - 4x + 4}\;.$$

Assim, determinar o ponto $Q \in r$ que está mais próxima do ponto P é equivalente a encontrar o menor valor que a função $d(P,Q) = \sqrt{5x^2 - 4x + 4}$ assume.

A questão acima é equivalente a encontrar o menor valor assumido pela função quadrática $f(x) = 5x^2 - 4x + 4$. Sabemos que a representação do gráfico da função f no plano cartesiano é uma parabola. Assim, temos que encontrar o vértice desse parabola para determinar o ponto $Q = (x_v\,,\, y_v)$. Sabemos que

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad \text{e} \qquad y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{16}{5}\,,$$

onde $a = 5\,,\, b = -4$ e $c = 4$.

Assim, o ponto $Q \in r$ mais próximo do ponto P é dado por:

$$Q = \left(\frac{2}{5}\,,\, \frac{16}{5} \right) \,.$$

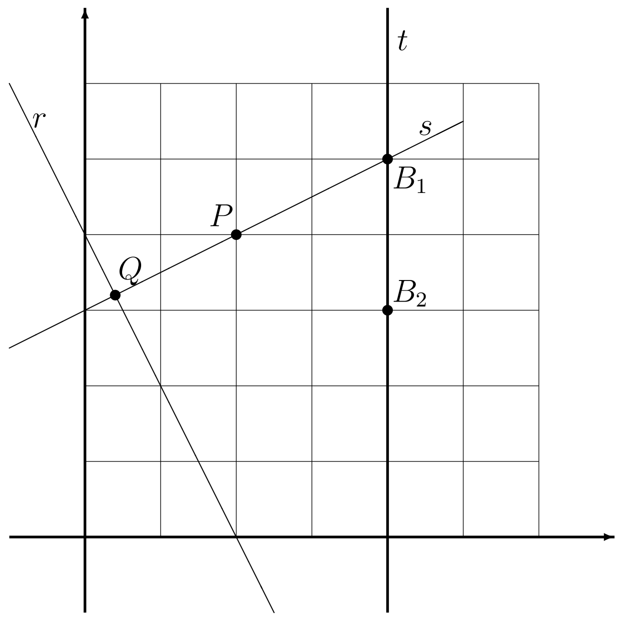
Uma outra forma de encontrar o ponto $Q \in r$ é determinar a reta s que passa pelo ponto P e que é perpendicular à reta r, e o ponto $Q = r \cap s$, como ilustra a figura abaixo.

A equação que representa a reta s é dada por $-x + y = 6$. Assim, para encontrar o ponto Q devemos encontrar a solução do seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ -x & + & 2y & = & 6 \end{array} \right.$$

obtendo $x = \dfrac{2}{5}$ e $y = \dfrac{16}{5}$.

Vamos fazer a representação gráfica dos problemas descritos acima no sistema de coordenadas cartesianas, como ilustra a figura abaixo.



É importante observar que o fato do ponto B_1 pertencer à reta s foi uma coincidência.