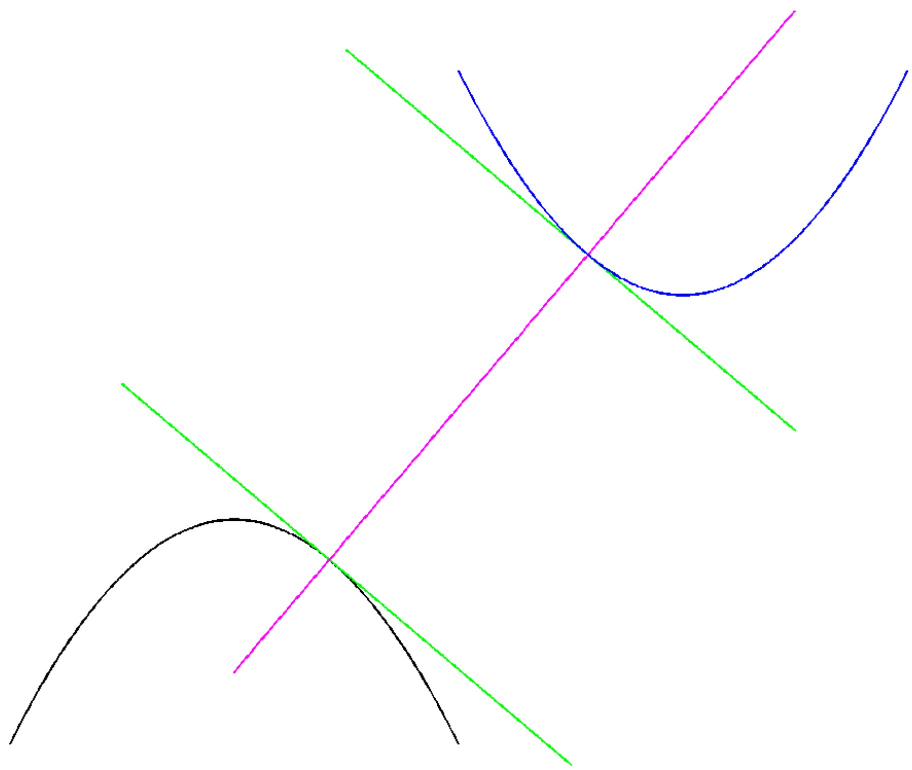
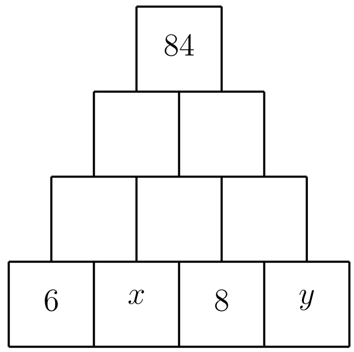


Gabarito da Prova da Segunda Fase – Nível Alfa

Questão 1 ***20 pontos***

Na pirâmide abaixo o valor em cada célula é igual a soma dos valores de cada uma das células que a suportam. Determine todos os valores possíveis de x e y sabendo que são primos entre si.

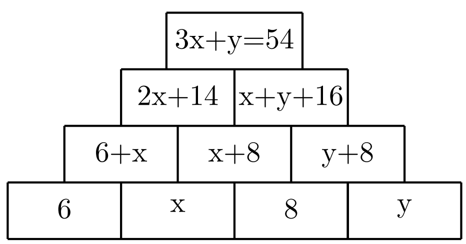


Resolução

Considerando a regra apresentada para saber o valor de cada célula da pirâmide, obtemos a seguinte equação

$$3x + y = 54\,, \tag{1}$$

nas variáveis x e y, como mostra a pirâmide abaixo.



Nesse momento, por simplicidade, vamos procurar as soluções no conjunto dos números naturais. Assim, na resolução vamos considerar a seguinte definição de números primos entre si.

Definição 1 *Dizemos que dois números naturais x e y são* ***primos entre si*** *se, e somente se, $mdc(x, y) = 1$.*

A equação (1) admite soluções no conjunto dos números naturais dadas por:

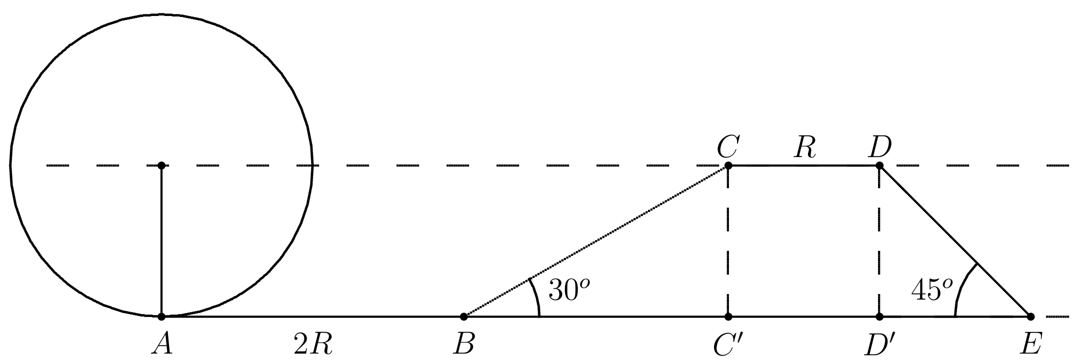
$$\begin{array}{rclcrcl}
x & = & 0 & \text{e} & y & = & 54\\
x & = & 1 & \text{e} & y & = & 51\\
x & = & 2 & \text{e} & y & = & 48\\
x & = & 3 & \text{e} & y & = & 45\\
x & = & 4 & \text{e} & y & = & 42\\
x & = & 5 & \text{e} & y & = & 39\\
x & = & 6 & \text{e} & y & = & 36\\
x & = & 7 & \text{e} & y & = & 33\\
x & = & 8 & \text{e} & y & = & 30\\
x & = & 9 & \text{e} & y & = & 27\\
x & = & 10 & \text{e} & y & = & 24\\
x & = & 11 & \text{e} & y & = & 21\\
x & = & 12 & \text{e} & y & = & 18\\
x & = & 13 & \text{e} & y & = & 15\\
x & = & 14 & \text{e} & y & = & 12\\
x & = & 15 & \text{e} & y & = & 9\\
x & = & 16 & \text{e} & y & = & 6\\
x & = & 17 & \text{e} & y & = & 3\\
x & = & 18 & \text{e} & y & = & 0
\end{array}$$

Entretanto, como x e y devem ser primos entre si, de acordo com a definição 1, temos o seguinte conjunto solução para o problema proposto

$$\begin{array}{rclcrcl}
x & = & 1 & \text{e} & y & = & 51\\
x & = & 5 & \text{e} & y & = & 39\\
x & = & 7 & \text{e} & y & = & 33\\
x & = & 11 & \text{e} & y & = & 21\\
x & = & 13 & \text{e} & y & = & 15\\
x & = & 17 & \text{e} & y & = & 3
\end{array}$$

Questão 2 ***20 pontos***

Considere uma pista de ciclismo como ilustra a figura abaixo, na qual uma parte da pista tem a forma de uma circunferência de raio R metros. Um ciclista, partindo do ponto A, contorna a circunferência no sentido anti–horário, uma só vez, atinge o ponto B, em seguida o ponto C, depois atinge o ponto D, o ponto E e finalmente retorna para o ponto A. Determine quanto metros percorreu o ciclista em função do raio R da circunferência.



Resolução

Para determinar quantos metros tem a pista de ciclismo, dada acima, temos que inicialmente calcular algumas distância. Sabemos que o primeiro trajeto é formado por uma circunferência de raio R metros. Assim, nessa primeira parte da pista temos $2\pi R$ metros.

O comprimento do trajeto BC é dado por:

$$\overline{BC} = \frac{R}{\sin(30^o)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{BC} = 2R\,.$$

O comprimento do trajeto DE é dado por:

$$\overline{DE} = \frac{R}{\sin(45^o)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{DE} = \sqrt{2}R\,.$$

O comprimento do trajeto $D'E$ é dado por:

$$\overline{D'E} = \frac{\overline{DE}}{\cos(45^o)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{D'E} = R\,.$$

O comprimento do trajeto BC' é dado por:

$$\overline{BC'} = \frac{\overline{BC}}{\cos(30^o)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{BC'} = \sqrt{3}R\,.$$

Portanto, o ciclista percorreu

$$2\pi R + 2R + 2R + R + \sqrt{2}R + R + R + R\sqrt{3} + 2R = (\,2\pi + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 9\,)R \text{ metros}\,.$$

Questão 3 ***20 pontos***

A estrada que liga dois vilarejos em uma montanha é formada somente por trechos de subida ou descida. Um ônibus sempre viaja a $30\,km/h$ *em trechos de subida e a* $60\,km/h$ *em trechos de descida. Encontre a distância entre os vilarejos se o ônibus leva exatamente seis horas para fazer a viagem completa de ida e volta.*

Resolução

Vamos denotar por D a distância entre os dois vilarejos, denotados por A e B, por d_1 o percurso de subida e por d_2 o percurso de descida no sentido do vilarejo A para o vilarejo B. Desse modo, d_2 é o percurso de subida e d_1 é o percurso de descida no sentido do vilarejo B para o vilarejo A.

Assim, o ônibus trafega a $d_1 + d_2 = D$ a $30\,km/h$ e trafega a $d_1 + d_2 = D$ a $60\,km/h$, considerando a viagem completa de ida e volta entre os dois vilarejos.

Vamos denotar por x o tempo que o ônibus trafega a $30\,km/h$. Sabendo que a viagem de ida e volta leva exatamente 6 horas, temos que o tempo que o ônibus trafega a $60\,km/h$ é expresso da forma $6 - x$.

Como o ônibus trafega a mesma distância de D quilômetros tanto a $30\,km/h$ quanto a $60\,km/h$, temos que

$$6 - x = \frac{x}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 12 - 2x = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4 \text{ horas} .$$

Portanto, a distância entre os dois vilarejos é de 120 quilômetros.

Questão 4 ***20 pontos***

Considere a sequência numérica (a_n) *definida da seguinte forma:*

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \qquad \textit{para} \qquad n \geq 1\,,$$

com $a_1 = 1$ *e* $a_2 = 3$.

(a) Escreva os dez primeiros termos dessa sequência.

(b) Determine uma expressão para o termo geral a_n *em função de* n.

(c) Determine a soma dos cem primeiros termos dessa sequência, isto é,

$$S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i\,.$$

Resolução

(a) Considerando a fórmula de recorrência, e sabendo que $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5\\
a_4 &= 2a_3 - a_2 = 10 - 3 = 7\\
a_5 &= 2a_4 - a_3 = 14 - 5 = 9\\
a_6 &= 2a_5 - a_4 = 18 - 7 = 11\\
a_7 &= 2a_6 - a_5 = 22 - 9 = 13\\
a_8 &= 2a_7 - a_6 = 26 - 11 = 15\\
a_9 &= 2a_8 - a_7 = 30 - 13 = 17\\
a_{10} &= 2a_9 - a_8 = 34 - 15 = 19
\end{aligned}$$

(b) Podemos observar do item **(a)** que a sequência (a_n) é a sequência dos números ímpares, assim podemos escrever o seu termo geral a_n em função de n da seguinte forma:

$$a_n = 2n - 1 \qquad \text{para} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\,.$$

(c) Pela expressão do termo geral a_n, sabemos que $a_{100} = 199$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
S_{100} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 199\\
S_{100} &= 199 + 197 + 195 + \cdots + 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$2 \times S_{100} = 200 \times 100 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_{100} = 10.000\,.$$

Podemos apresentar a solução dos itens **(b)** e **(c)** utilizando o conhecimento de Progressão Aritmética, como a seguir.

Observando o item **(a)**, temos que a sequência (a_n) é uma Progressão Aritmética com o primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 2$.

Sabemos que o termo geral de uma PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r \,,$$

e que a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} \,.$$

Portanto, a soma dos cem primeiros termos dessa sequência é expressa da seguinte forma:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \times 100}{2} = \frac{(1 + 199) \times 100}{2} = 200 \times 50 = 10.000 \,.$$

Questão 5 ***20 pontos***

Tinha 900 reais para comprar algumas camisas, todas com o mesmo preço. Como obtive um desconto de 60 reais no preço de cada camisa consegui comprar quatro camisas a mais do que previa inicialmente comprar com os 900 reais. Determine quantas camisas comprei e o preço que paguei por cada camisa.

Resolução

Vamos denotar por y o valor inicial de cada camisa e por x a quantidade de camisas que poderia ser compradas com os 900 reais. Assim, temos

$$xy = 900 . \tag{2}$$

Como obtive um desconto de 60 reais, e desse modo, pude comprar mais quatro camisas, temos

$$(x + 4)(y - 60) = 900 \iff xy - 60x + 4y = 1140 . \tag{3}$$

Da equação (2), temos

$$xy = 900 \iff y = \frac{900}{x} . \tag{4}$$

Substituindo o valor de xy e o valor de y, dados na equação (4), na equação (3), obtemos

$$900 - 60x + \frac{3600}{x} = 1140 \iff -60x^2 - 240x + 3600 = 0 . \tag{5}$$

Simplificado a equação (5), temos a seguinte equação quadrática

$$x^2 + 4x - 60 = 0 , \tag{6}$$

cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2} = -2 \pm 8 . \tag{7}$$

Assim, temos $x = 6$, uma vez que $x = -10$ não serve como resposta, pois x representa a quantidade de camisas que poderiam ser compradas pelo valor de $y = \frac{900}{6} = 150$ reais cada camisa.

Portanto, como obtive um desconto de 60 reais e consegui comprar quatro camisas a mais, comprei 10 camisas a um preço de 90 reais cada camisa.