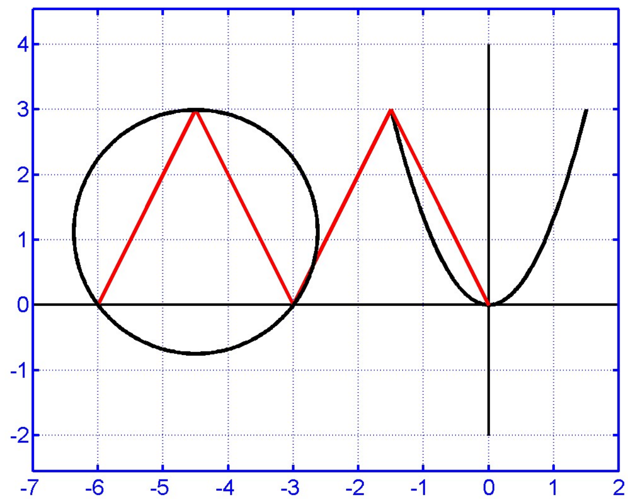


# *Gabarito da Prova da Segunda Fase*

*20 de Junho de 2009*

| *Código de Identificação:* |
|---|

| *Questões* | *Pontos* |
|---|---|
| Questão 1 | |
| Questão 2 | |
| Questão 3 | |
| Questão 4 | |
| Questão 5 | |
| Questão 6 | |
| *T o t a l* | |

**Questão 1** ***20 pontos***

*O custo total para a produção de um determinado produto é a soma do valor fixo de* $R\$\,800,00$ *com o custo de produção unitário de* $R\$\,4,00$*. Se o preço unitário de venda desse produto for de* $R\$\,6,50$*, qual é a quantidade mínima que deve ser comercializada para que apresente lucro? Faça uma representação gráfica da situação descrita no problema.*

**Resolução**

Vamos denotar por $x$ a quantidade do produto produzido, por $C(x)$ o custo de produção, e por $R(x)$ a receita obtida com a venda dos produtos produzidos. Assim, temos as seguintes regras funcionais para $C$ e $R$:

$$C(x) = 800 + 4x \qquad \text{e} \qquad R(x) = 6,5x \, .$$

Na Figura 1, apresentamos o gráfico do custo de produção (linha azul) e o gráfico da receita (linha preta), em função da produção.

Assim, a quantidade mínima que deve ser comercializada para que apresente lucro, que vamos denotar por $\overline{x}$, é tal que o custo de produção fica igual a receita, isto é,

$$C(\overline{x}) = R(\overline{x}) \, .$$

Desse modo, $\overline{x}$ é a solução da seguinte equação linear

$$800 + 4x = 6,5x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2,5x = 800 \, .$$

Logo, da equação acima, obtemos $\overline{x} = 320$. Portanto, para apresentar lucro, deve ser comercializado pelo menos $320$ produtos.

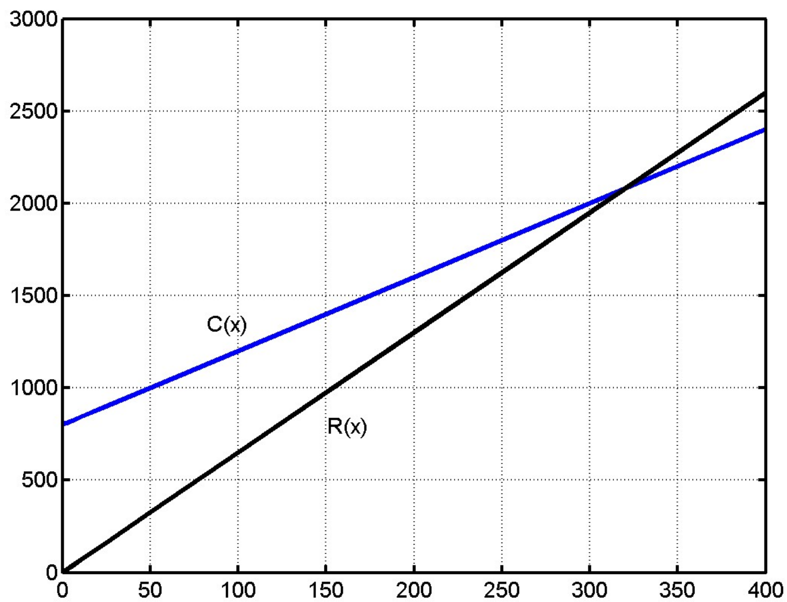


Figura 1: O custo de produção é representado pela linha azul, e a receita é representada pela linha preta, em função da produção

**Questão 2** ***20 pontos***

*Visto da janela do segundo andar de uma casa o topo de um prédio em frente, do outro lado da rua, tem um ângulo de elevação de 60 graus, enquanto que sua base tem um ângulo de depressão de 30 graus. Se a distância entre a casa e o prédio é 16 m, determine a altura do prédio. Inicialmente faça um desenho representando a situação descrita no problema.*

**Resolução**

Na Figura 2, temos um desenho representando a situação descrita na questão, onde indicamos por $x + y$ a altura do prédio. Desse modo, fazendo uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo, sabemos que

$$\tan(60^o) = \frac{x}{16} \qquad \text{e} \qquad \tan(30^o) = \frac{y}{16}.$$

Assim, obtemos os seguintes valores

$$x = 16\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad y = 16\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, a altura do prédio é igual a

$$x + y = \frac{64}{3}\sqrt{3}\,m$$

que aproximadamente é igual a $36,950417\,m$.

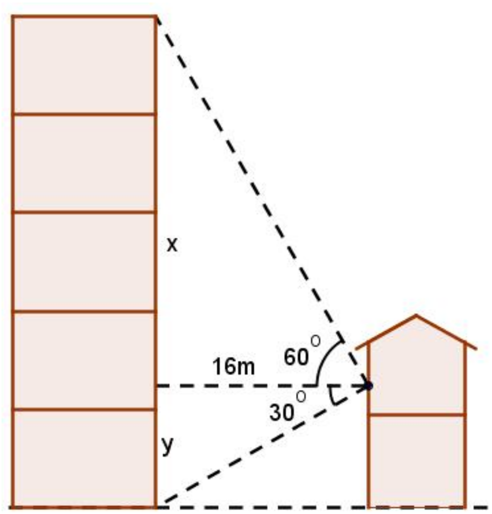


Figura 2: Representação gráfica da Questão 2.

**Questão 3** ***20 pontos***

*Altamirando coloca dez notas de dez reais em seu bolso esquerdo, das quais quatro são falsas. No bolso direito, coloca sete notas de dez reais, todas verdadeiras. Na máquina de café, ele pega uma nota ao acaso de seu bolso esquerdo, mas percebe que a máquina só aceita fichas. Põe a nota no bolso direito e se dirige à máquina que aceita dinheiro. Ele pega uma nota ao acaso de seu bolso direito. Calcule a probabilidade de que a nota seja falsa.*

**Primeira Solução**

Denotemos por $F_i$ o evento "a $i$-ésima nota selecionada é falsa", onde $i = 1$ representa a primeira seleção, na máquina que só aceita fichas, e $i = 2$ representa a segunda seleção, na máquina que aceita dinheiro.

Estamos interessados na probabilidade de $F_2$ ocorrer.

A primeira extração é feita do seu bolso esquerdo que tem 4 notas falsas e 6 notas verdadeiras. Portanto, temos que

$$P(F_1) = \frac{4}{10} \qquad \text{e} \qquad P(F_1^C) = \frac{6}{10}.$$

A nota selecionada é colocada em seu bolso direito que fica, portanto, com 8 notas, das quais com certeza 7 são verdadeiras.

Se a primeira nota selecionada tiver sido verdadeira, $F_1^C$, então a probabilidade de que a segunda também seja é 1, já que haverá 8 notas verdadeiras. Assim, neste caso, a probabilidade de que a segunda nota seja falsa é 0. Em símbolos, $P(F_2|F_1^C) = 0$.

Se a primeiro nota selecionada tiver sido falsa, $F_1$, então a probabilidade de que a segunda seja falsa é $\frac{1}{8}$, já que haverá 7 notas verdadeiras e 1 falsa. Em símbolos, $P(F_2|F_1) = \frac{1}{8}$.

Assim, a probabilidade de que $F_2$ ocorra é dada por:

$$\begin{aligned} P(F_2) &= P(F_2 \cap F_1) + P(F_2 \cap F_1^C) \\ &= P(F_1)P(F_2|F_1) + P(F_1^C)P(F_2|F_1^C) \\ &= \frac{4}{10}\frac{1}{8} + \frac{6}{10}0 = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

**Segunda Solução**

Veja árvore de probabilidade na Figura 3.

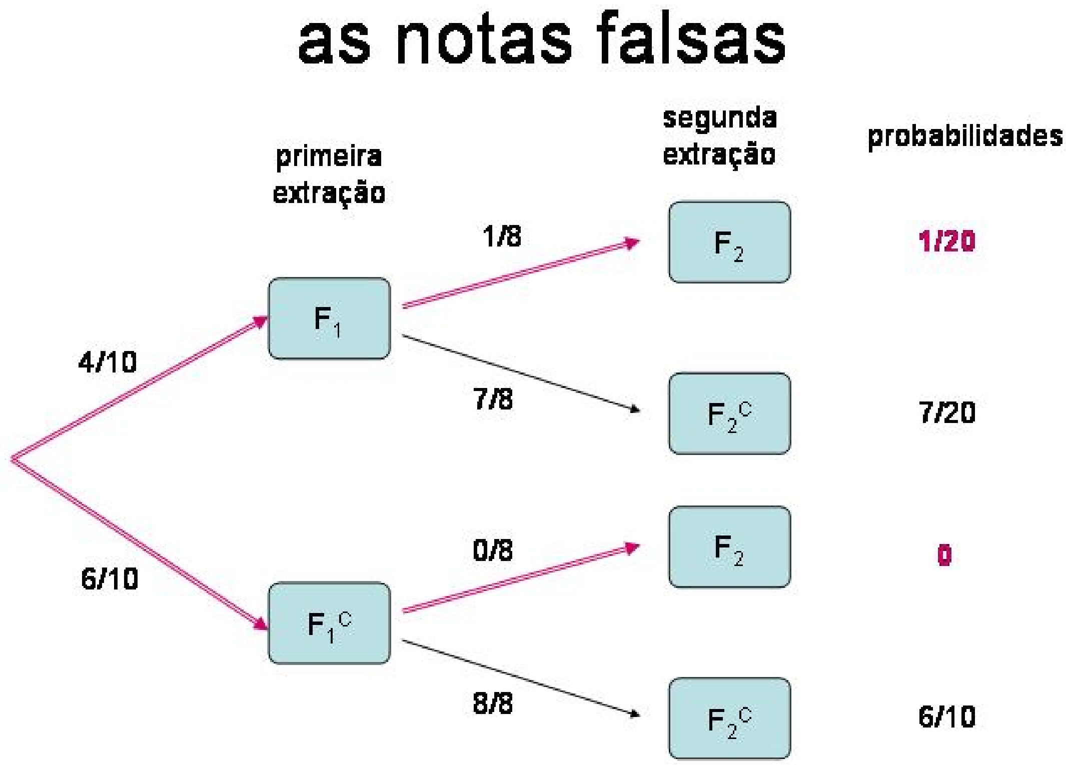


Figura 3: Árvore de probabilidade para a Questão 3.

**Questão 4** ***20 pontos***

*João ganhou R\$ 120,00 pelo seu aniversário de 10 anos. Em cada mês seguinte ao seu aniversário de 10 anos, ele recebe R\$ 3,00 por ajudar sua mãe a recolher as roupas do varal. Maria, sua prima de mesma idade, ganhou R\$ 100,00 no aniversário e a cada mês passou a receber R\$ 7,00, por auxiliar seu pai na limpeza do jardim. Ambos acumulam o presente e as recompensas mensais em seus respectivos cofres. Existem quantias que serão acumuladas por ambos, embora em tempos distintos. Por exemplo, após 40 meses João terá acumulado R\$ 240,00, a mesma quantia que Maria acumulará em 20 meses. Qual a menor quantia igual que ambos terão?*

**Resolução**

Começamos observando que João, passados $n$ meses de seu aniversário, tem $120 + 3n$ reais, enquanto Maria, passados $m$ meses de seu aniversário, tem $100 + 7m$ reais. Se ambos tem a mesma quantia, então

$$120 \ + 3n = 100 + 7m \, .$$

É importante observar que não é necessário termos $m = n$.

Considerando a equação

$$120 + 3n = 100 + 7m \, ,$$

obtemos uma relação para $m$, em função de $n$, dada por:

$$\begin{aligned} m &= \frac{120 + 3n - 100}{7} \\ &= \frac{20 + 3n}{7} \end{aligned}$$

ou uma relação para $n$, em função de $m$, dada por:

$$\begin{aligned} n &= \frac{100 + 7m - 120}{3} \\ &= \frac{7m - 20}{3} \end{aligned}$$

Observando a primeira destas equações e considerando que $m$ representa uma quantidade de meses, temos que $m$ deve ser um número natural, de modo que

$$\frac{20 + 3n}{7}$$

deve ser inteiro, ou seja, $20 + 3n$ é um múltiplo natural de $7$.

Ao dividirmos $20$ por $7$ temos resto $6$ $(20 = 2 \times 7 + 6)$. Assim, para que $20 + 3n$ seja divisível por $7$, o resto da divisão de $3n$ por $7$ deve ser igual a $1 = 7 - 6$.

O menor múltiplo de $3$ que ao ser dividido por $7$ tem resto igual a $1$ é

$$15 = 3 \times 5 = 2 \times 7 + 1 .$$

Logo, o menor valor possível para $n$ é $5$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} m &= \frac{20 + 3 \times 5}{7} \\ &= \frac{35}{7} \\ &= 5 \end{aligned}$$

A menor quantia que ambos terão em comum é

$$135 = 120 + 3 \times 5 = 100 + 7 \times 5 .$$

Veja que coincidentemente, tanto João como Maria atingem esta quantia após $5$ meses.

**Observação:** Poderíamos chegar ao mesmo resultado trabalhando a partir da equação

$$n = \frac{7m - 20}{3} ,$$

mas neste caso, teríamos de prestar atenção a uma condição adicional: encontrar o menor valor natural $m$ para o qual $n$ é inteiro e positivo.

**Questão 5** ***20 pontos***

*Se possível, exiba uma função* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow I\!N$ *que seja uma bijeção, isto é, uma função que seja injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, onde*

$$I\!N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \qquad e \qquad \mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

*são o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros, respectivamente.*

**Resolução**

Podemos considerar a função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow I\!N$ definida da seguinte forma: o zero é levado no zero, os inteiros negativos são levados nos números ímpares, e os inteiros positivos são levados nos números pares.

Assim, escrevemos a seguinte regra funcional para a função $f$:

$$f(m) = \begin{cases} 2\,|\,m\,| - 1 & \text{para} \quad m \quad \text{negativo} \\ 0 & \text{para} \quad m = 0 \\ 2m & \text{para} \quad m \quad \text{positivo} \end{cases}$$

para $m \in \mathbb{Z}$.

Podemos verificar facilmente que $f$ é uma bijeção de $\mathbb{Z}$ em $I\!N$, pois $Im(f) = I\!N$, e para cada $n \in I\!N$ existe um único $m \in \mathbb{Z}$ de modo que $n = f(m)$.

**Questão 6** ***20 pontos***

*Considere no plano cartesiano o triângulo $ABC$ de vértices*

$$A = (a, b) \quad , \quad B = (a, c) \quad e \quad C = (d, b) \, ,$$

*com $b \neq c$ e $a \neq d$. Determine o centro e o raio da circunferência que passa pelos vértices do triângulo $ABC$. Inicialmente faça o desenho de um triângulo contido no primeiro quadrante satisfazendo essas condições.*

**Resolução**

Como o triângulo $ABC$ é um triângulo retângulo, sabemos que o centro da circunferência circunscrita é o ponto médio $M$ do segmento $BC$, veja Figura 4, isto é,

$$M = (m_1, m_2) = \left( \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2} \right).$$

Assim, o raio $r$, da circunferência circunscrita, é igual ao comprimento do segmento $AM$:

$$r = \sqrt{\left(a - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b+c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2},$$

veja a representação na Figura 4.

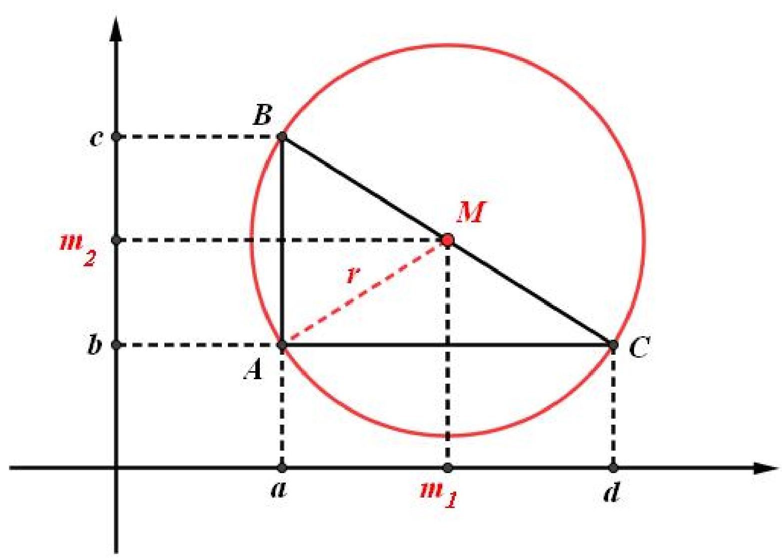


Figura 4: Triângulo $ABC$, e a circunferência circunscrita.