Gabarito da Prova da Segunda Fase

21 de Agosto de 2010

Questão 1 ***20 pontos***

Considere um trabalhador que no ano de 2010 *recebe um salário mensal de* $R\$\,1.200,00$*. Determine o primeiro ano no qual esse trabalhador receberá um salário mensal maior que* $R\$\,6.000,00$ *tendo* $20\,\%$ *de aumento anual. Caso necessário, utilize as seguintes aproximações:*

$$\log(5) \approx 0,7 \qquad e \qquad \log(1,2) \approx 0,08 \,.$$

Resolução

Vamos denotar por S_0 o salário no ano de 2010, isto é, $S_0 = 1.200,00$. Assim, temos que S_1, S_2, $\cdots$, S_n representam os salários nos anos seguintes, que são calculados da forma:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 + 0,2 \times S_0 = 1,2 \times S_0 = 1,2 \times 1.200,00 \\
S_2 &= S_1 + 0,2 \times S_1 = 1,2 \times S_1 = (1.2)^2 \times 1.200,00 \\
S_3 &= S_2 + 0,2 \times S_2 = 1,2 \times S_2 = (1.2)^3 \times 1.200,00 \\
&\vdots \\
S_n &= S_{n-1} + 0,2 \times S_{n-1} = 1,2 \times S_{n-1} = (1.2)^n \times 1.200,00
\end{aligned}$$

Desse modo, no n–ésimo mês subseqüente o salário é expresso da forma:

$$S_n = (1.2)^n \times S_0 = (1.2)^n \times 1.200,00 \,.$$

Queremos determinar o menor valor de n de modo que

$$S_n > 6.000,00 \iff (1.2)^n \times 1.200,00 > 6.000,00 \iff (1.2)^n > 5 \,.$$

Aplicando a função logarítmica em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$(1.2)^n > 5 \iff n \times \log(1,2) > \log(5) \iff n > \frac{\log(5)}{\log(1,2)} \,.$$

É importante observar que após a aplicação da função logarítmica a desigualdade permanece a mesma, uma vez que a função logarítmica é uma função estritamente crescente.

Finalmente, utilizando as aproximações acima, temos que

$$n > \frac{\log(5)}{\log(1,2)} \approx \frac{0,7}{0,08} = \frac{70}{8} = \frac{35}{4} = 8,75 \,.$$

Portanto, tomando $n = 9$, temos que 2019 será o primeiro ano no qual esse trabalhador receberá um salário mensal maior que $R\$\,6.000,00$.

Questão 2 ***20 pontos***

Considere no plano cartesiano os seguintes pontos:

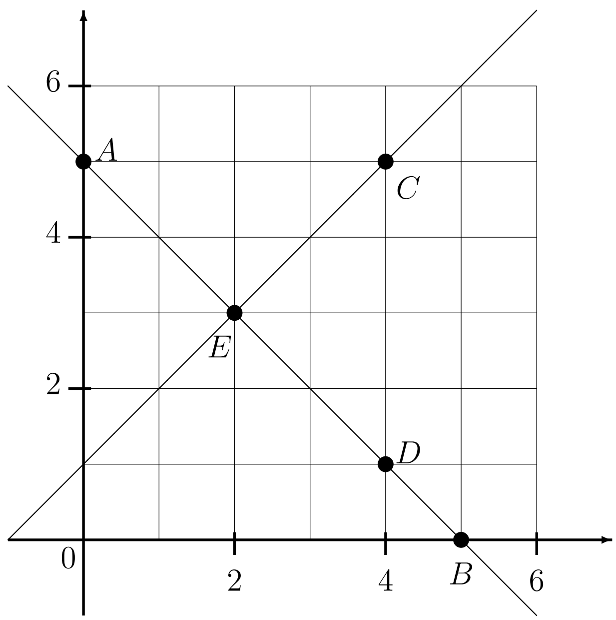
$$A = (0,5) \quad , \quad B = (5,0) \qquad e \qquad C = (4,5) \, .$$

(a) Determine a equação da reta r que passa pelos pontos A e B.

(b) Verifique se o ponto $D = (4,1)$ pertence à reta r.

(c) Determine a distância do ponto C à reta r.

Utilize o sistema de coordenadas da figura abaixo, para representar a situação descrita no problema.



Resolução

(a) Sabemos que o gráfico de uma função afim, isto é, uma função da forma $f(x) = ax + b$, é uma reta. Assim, vamos determinar a função afim tal que

$$f(0) = 5 \qquad \text{e} \qquad f(5) = 0 \, .$$

Desse modo, obtemos

$$b = 5 \qquad \text{e} \qquad 5a + 5 = 0 \iff a = -1 \, .$$

Portanto, a equação da reta r que passa pelos pontos A e B é dada por:

$$y = 5 - x \, .$$

(b) Podemos verifica facilmente que o ponto $D = (4, 1)$ pertence à reta r, uma vez que para $x = 4$, tem–se $y = 1$.

(c) Note que o triângulo ACD é um triângulo retângulo, que possui uma área igual a 8. De fato,

$$\frac{\overline{AC} \times \overline{CD}}{2} = 8 \,,$$

uma vez que $\overline{AC} = \overline{CD} = 4$.

Podemos observar que a altura do triângulo retângulo ACD tomando a base o segmento AD é exatamente a distância do ponto C á reta r.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD, obtemos que $\overline{AD} = 4\sqrt{2}$. Desse modo, denotando por h a altura do triângulo retângulo ACD tomando a base o segmento AD, temos que a área do triângulo retângulo ACD pode ser calculada da forma:

$$\frac{4\sqrt{2} \times h}{2} = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = 2\sqrt{2} \,.$$

Portanto, a distância do ponto C à reta r é igual a $h = 2\sqrt{2}$.

Como uma **segunda proposta de resolução**, utilizando os conhecimentos de geometria analítica, podemos obter a equação da reta s, passando pelo ponto C e perpendicular à reta r, que é dada por:

$$y = x + 1 \,.$$

Podemos observar facilmente que o ponto $E = (2, 3)$ é o ponto de intersecção das retas r e s, isto é, o ponto $E = (2, 3)$ satisfaz as equações

$$x + y = 5 \qquad \text{e} \qquad -x + y = 1 \,.$$

Portanto, a distância do ponto C á reta r é exatamente o comprimento do segmento CE, isto é,

$$\overline{CE} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \,.$$

Questão 3 **20 pontos**

Sabendo que o número natural $2^{48} - 1$ *possui dois divisores naturais entre* 60 *e* 70, *determine esses divisores.*

Resolução

Inicialmente vamos observar que o número natural $2^{48} - 1$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$2^{48} - 1 = (2^{24} - 1)(2^{24} + 1),$$

e que o número natural $2^{24} - 1$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$2^{24} - 1 = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1).$$

Desse modo, repetindo esse processo, obtemos

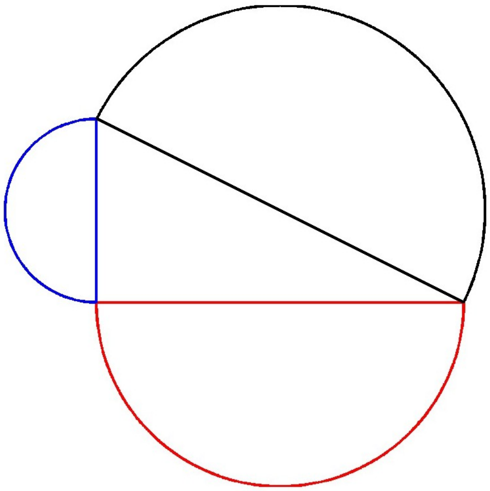
$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) \\ &= (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= (2^{6} - 1)(2^{6} + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= 63 \times 65 \times (2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \end{aligned}$$

uma vez que $2^6 = 64$. Portanto, o número natural $2^{48} - 1$ é divisível por 63 e por 65.

Questão 4 ***20 pontos***

Considere a figura abaixo. Analise se a afirmação é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

"A área do semicírculo construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas de cada um dos semicírculos construídos sobre os catetos"



Resolução

A afirmação é verdadeira. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 ,$$

onde c é o comprimento da hipotenusa, a e b são os comprimentos dos catetos.

Assim, a área do semicírculo sobre a hipotenusa, que denotamos por A_1, é dada por:

$$A_1 = \frac{\pi c^2}{8} ,$$

e as áreas dos semicírculos sobre os catetos, que denotamos por A_2 e A_3, são dadas por:

$$A_2 = \frac{\pi a^2}{8} \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{\pi b^2}{8} .$$

Portanto, temos que

$$A_2 + A_3 = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi c^2}{8} = A_1 ,$$

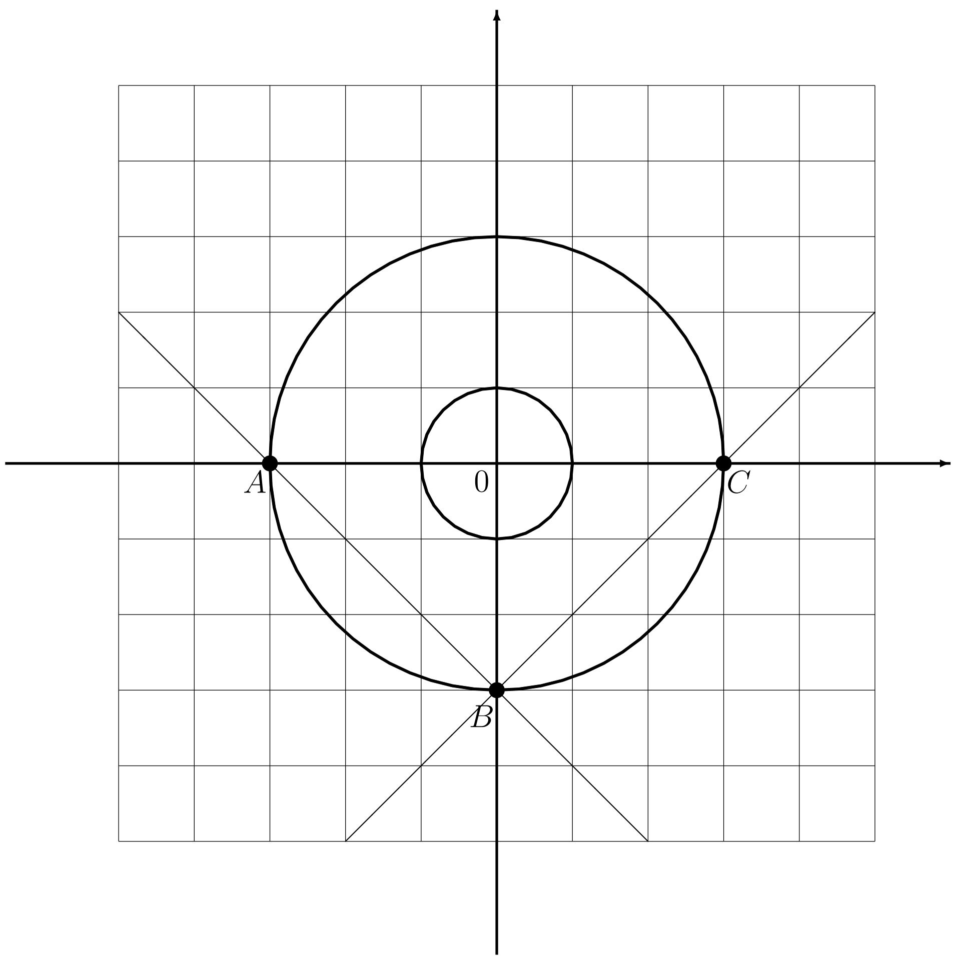
uma vez que $c^2 = a^2 + b^2$, provando que a afirmação é verdadeira.

Questão 5 ***20 pontos***

Represente graficamente e determine a área da região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ x + y \geq -3 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$

Utilize o sistema de coordenadas da figura abaixo para fazer a representação da região.



Resolução

Primeiramente temos a região interna à circunferência de centro $C_1 = (0,0)$ e raio $r_1 = 3$, que é representada pela desigualdade

$$x^2 + y^2 \leq 3 ,$$

uma vez que a origem $(0,0)$ satisfaz a desigualdade acima. Essa região vamos denotar por R_1.

Depois temos a região externa à circunferência de centro $C_2 = (0,0)$ e raio $r_2 = 1$, que é representada pela desigualdade

$$x^2 + y^2 \geq 1 ,$$

uma vez que a origem $(0,0)$ não satisfaz a desigualdade acima. Essa região vamos denotar por R_2.

Em seguida temos a região acima do gráfico da reta, que passa pelos ponto $A = (-3,0)$ e $B = (0,-3)$, dada pela equação

$$y = -3 - x ,$$

uma vez que a origem $(0,0)$ satisfaz a desigualdade $x + y \geq -3$. Essa região vamos denotar por R_3.

Finalmente, temos a região acima do gráfico da reta, que passa pelos ponto $B = (0,-3)$ e $C = (0,3)$, dada pela equação

$$y = x - 3 ,$$

uma vez que a origem $(0,0)$ satisfaz a desigualdade $x - y \leq 3$. Essa região vamos denotar por R_4.

Assim a região procurada, que vamos denotar por R, e dada pela intersecção das regiões descritas acima, isto é, $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$, como mostra a figura acima.

Desse modo, vamos precisar da área do triângulo isosceles ABC, com vértices A, B e C. Essa área denotamos por A_1. A área do círculo de centro $C_2 = (0,0)$ e raio $r_2 = 1$. Essa área vamos denotar por A_2. A área do semicírculo de centro $C_1 = (0,0)$ e raio $r_1 = 3$. Essa área vamos denotar por A_3.

Portanto, a área da região R, que vamos denotar por A, é dada da forma:

$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{9\pi}{2} - \pi = \frac{18 + 7\pi}{2} .$$

Questão 6 ***20 pontos***

Determine de quantas formas podemos distribuir onze bolinhas iguais em três urnas distinguíveis, que denotamos por A, B e C, de modo que nenhuma urna fique vazia.

Resolução

Como nenhuma urna pode ficar vazia, podemos começar colocando uma bolinha na urna A e uma bolinha na urna B. Logo, ficamos com nove bolinhas na urna C. Fixando a urna A com uma bolinha, temos as seguintes configurações:

A	B	C
1	1	9
1	2	8
1	3	7
1	4	6
1	5	5
1	6	4
1	7	3
1	8	2
1	9	1

Nesse caso, temos um total de 9 configurações.

Fixando a urna A com duas bolinha, temos as seguintes configurações:

A	B	C
2	1	8
2	2	7
2	3	6
2	4	5
2	5	4
2	6	3
2	7	2
2	8	1

Nesse caso, temos um total de 8 configurações.

Repetindo esse processo, temos as configurações possíveis para o número de bolinhas fixas na urna A iguais a $3, 4, \cdots, 7$, que são $7, 6, \cdots, 3$. Agora fixando oito bolinhas na urna A obtemos mais duas configurações

A	B	C
8	1	2
8	2	1

Finalmente, colocando nove bolinhas na urna A, ficamos com uma bolinha na urna B e com uma bolinha na urna C. Obtendo assim mais uma configuração.

A	B	C
9	1	1

Portanto, o número total das configurações é dado por:

$$9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = \frac{(9 + 1) \times 9}{2} = 45\,,$$

uma vez que temos a soma de nove termos de uma progressão aritmética com o primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 1$.

Temos também uma **segunda proposta de resolução** utilizando combinatória. Para isso, vamos denotar as três urnas como uma fileira de quatro barras, de modo que o espaço entre as barras represente o interior de cada uma das urnas, como mostra o esquema abaixo

$$| \quad | \quad | \quad |$$

onde as duas barras dos extremos devem permanecer fixas. Podemos indicar as urnas A, B e C, no esquema acima, da esquerda para a direita.

As bolinhas devem ser colocadas entre a primeira e a última barra, indicando as diversas possibilidades. Vamos indicar cada bolinha pelo símbolo $\otimes$. Desta forma, cada configuração de urnas e bolinhas é uma seqüência de barras $|$ e símbolos $\otimes$, tendo sempre uma barra no início e outra no final da seqüência.

Como não devemos deixar nenhuma urna vazia, ou seja, temos que considerar as possibilidades com a seguinte seqüência fixa

$$| \otimes | \otimes | \otimes |$$

restando oito bolinhas.

Desse modo, contar o total de possibilidades das urnas e bolinhas é equivalente a contar o total de combinações de dois símbolos: 8 bolinhas $\otimes$ e 2 barras $|$. Portanto, temos

$$\frac{10!}{8!\,2!} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

configurações, que é o total de combinações que podemos formar com 8 elementos de um grupo de 10 elementos.