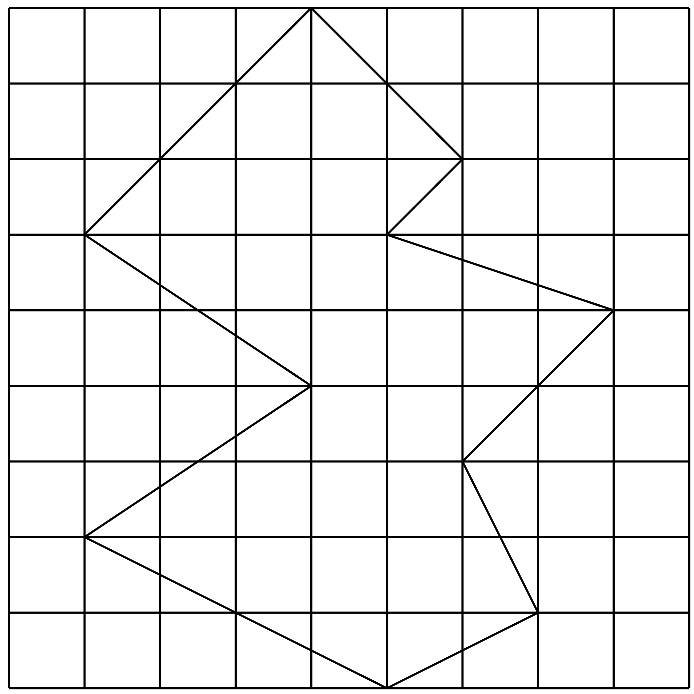
Gabarito da Prova da Segunda Fase – Nível Alfa

Questão 1 ***20 pontos***

Considere que no reticulado abaixo a área de cada quadradinho seja igual a $1\,m^2$*. Determine a área da região limitada pela poligonal.*



Resolução

Na figura abaixo temos a região limitada pela poligonal subdividida em figuras geométricas cujas áreas são conhecidas e são dadas por:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{b_1 \times h_1}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} \\
A_2 &= \frac{b_2 \times h_2}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \\
A_3 &= \frac{b_3 \times h_3}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2} \\
A_4 &= \frac{b_4 \times h_4}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \\
A_5 &= \frac{b_5 \times h_5}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \\
A_6 &= \frac{b_6 \times h_6}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \\
A_7 &= \frac{b_7 \times h_7}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \\
A_8 &= \frac{b_8 \times h_8}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3
\end{aligned}
$$

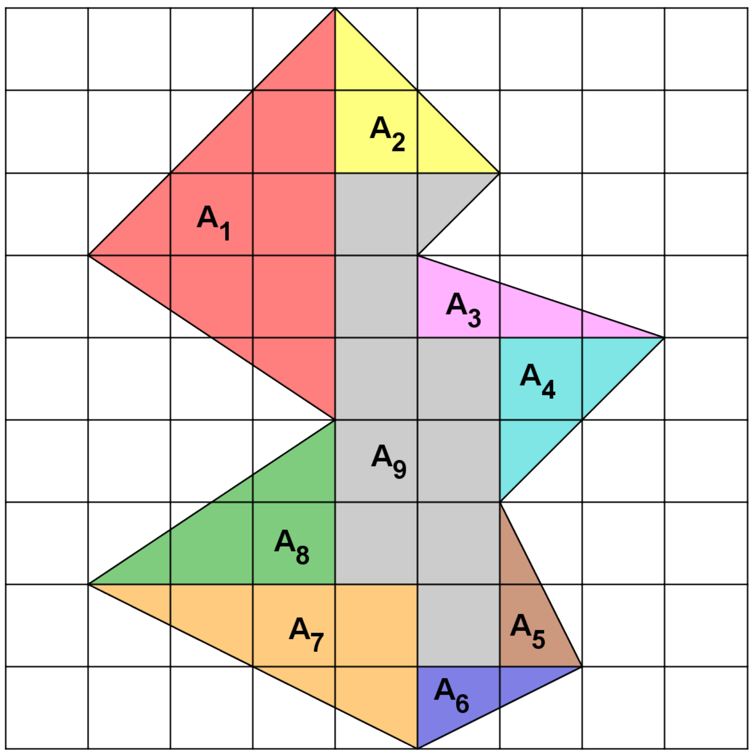
que são áreas de triângulos, e restando mais nove quadrados e meio, isto é,

$$A_9 \;=\; 9 \;+\; \frac{1}{2} \;=\; \frac{19}{2}\;.$$

Assim, a área da região limitada pela poligonal é data por

$$A_T \;=\; A_1 \;+\; A_2 \;+\; \cdots \;+\; A_8 \;+\; A_9 \;=\; 13 \;+\; \frac{37}{2} \;=\; \frac{63}{2} \;=\; 31 \;+\; \frac{1}{2}$$

Portanto, a região limitada pela poligonal tem uma área igual a $31,5\,m^2$.



Questão 2 ***20 pontos***

*O grau **Celsius**, representado pelo símbolo ^oC, designa a unidade de temperatura, assim denominada em homenagem ao astrônomo sueco Anders Celsius (1701–1744), que foi o primeiro a propô–la em 1742. A escala de temperatura Celsius possui dois pontos importantes, o ponto de solidificação da água que corresponde ao valor $0\,^oC$ e o ponto de ebulição que corresponde ao valor $100\,^oC$, observados a uma pressão atmosférica padrão, também chamada de pressão normal.*

*Vamos apresentar uma nova escala de temperatura denominada grau **Petrus**, representado pelo símbolo ^oP, que possui dois pontos importantes, o ponto de solidificação da água que corresponde ao valor $35\,^oP$ e o ponto de ebulição que corresponde ao valor $185\,^oP$, observados a uma pressão atmosférica padrão, também chamada de pressão normal.*

(a) Determine a relação de conversão de grau Celsius para grau Petrus, e determine também relação de conversão de grau Petrus para grau Celsius . É importante observar que para cada temperatura em grau Celsius corresponde uma única temperatura em grau Petrus, e vice–versa.

(b) Faça a representação gráfica da relação de conversão de grau Celsius para grau Petrus.

(c) Determine em grau Celsius a temperatura de $65\,^oP$.

(d) Existe uma temperatura em grau Celsius que corresponde ao dobro do seu valor em grau Petrus?

Resolução

(a) Vamos determinar a conversão de grau Celsius para grau Petrus, isto é, vamos encontrar uma função $P(C)$, uma vez que a cada temperatura em grau Celsius corresponde uma única temperatura em grau Petrus. Inicialmente, observamos que

$$P(0) = 35 \qquad \text{e} \qquad P(100) = 185 .$$

Assim, podemos determinar de modo único uma função afim $P(C) = aC + b$, para representar o grau Petrus em função do grau Celsius. Impondo as condições acima, obtemos

$$P(0) = b = 35 \qquad \text{e} \qquad P(100) = 100 \times a + 35 = 185 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{150}{100} = \frac{3}{2} .$$

Assim, obtemos

$$P(C) = \frac{3}{2}C + 35 .$$

Da relação acima, podemos obter facilmente a conversão de grau Celsius para grau Petrus, isto é, podemos determinar uma função $C(P)$, que é dada por:

$$C(P) = \frac{2P - 70}{3} .$$

(c) Para determinar em grau Celsius a temperatura de $65\,^oP$, basta avaliar a função $C(65)$, obtendo

$$C(65) = \frac{2 \times 65 - 70}{3} = 20 .$$

Assim, $65\,^oP$ corresponde a $20\,^oC$.

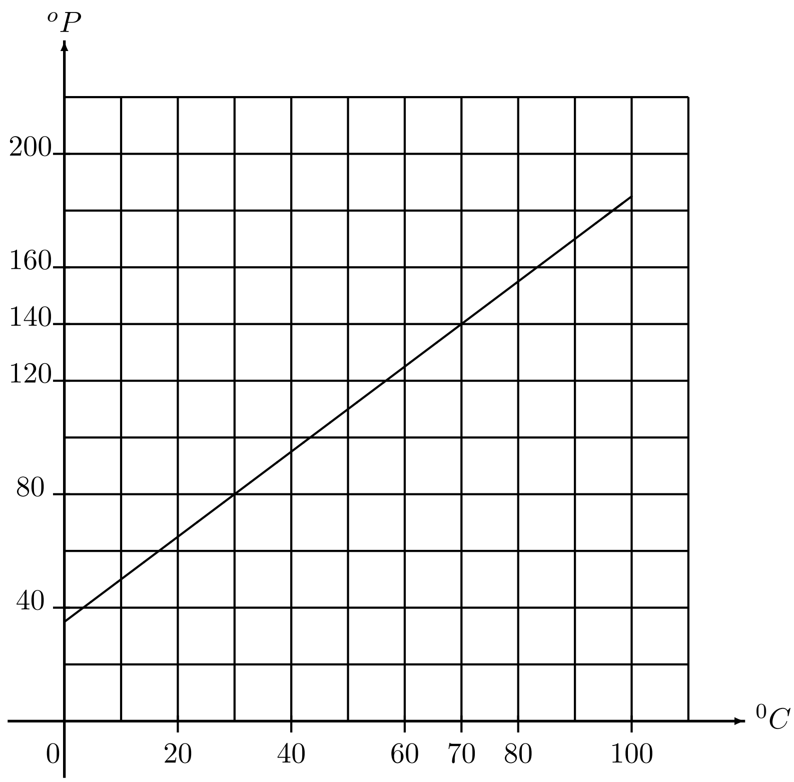
(d) Para determinar uma temperatura em grau Celsius que corresponde ao dobro do seu valor em grau Petrus, devemos resolver a seguinte equação

$$2C \;=\; \frac{3}{2}C \;+\; 35 \quad\Longleftrightarrow\quad 4C \;=\; 3C \;+\; 70 \quad\Longleftrightarrow\quad C \;=\; 70\,.$$

Assim, $70\,^oC$ corresponde a $140\,^oP$.

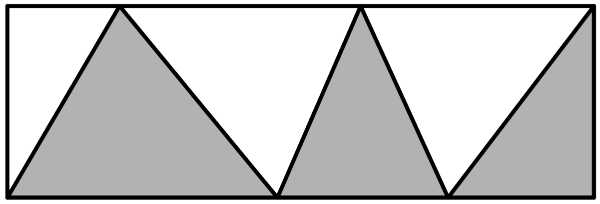
(b) Na Figura abaixo temos o gráfico representando grau Petrus como função de grau Celsius, isto é, o gráfico da função

$$P(C) \;=\; \frac{3}{2}C \;+\; 35\,.$$



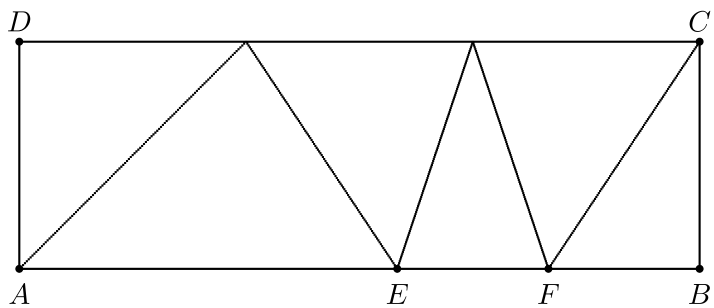
Questão 3 ***20 pontos***

Considere que o retângulo abaixo possui uma área de $27\,m^2$. *Determine a área da região sombreada.*



Resolução

Considere a figura abaixo que representa uma situação semelhante a situação apresentada no problema. Assim, considerando que o retângulo $ABCD$ possui uma área de $27\,m^2$, isto é, $\overline{AB} \times \overline{AD} = 27\,m^2$.



Vamos denotar por A_1 a área do triângulo com base AE e altura AD, por A_2 a área do triângulo com base EF e altura AD, e por A_3 a área do triângulo com base FB e altura AD.

Desse modo, temos que a área da região sombreada, que denotamos por A_s é escrita como:

$$A_s = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{EF} \times \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{FB} \times \overline{AD}}{2} .$$

Note que a equação acima pode ser escrita da forma:

$$A_s = \frac{(\overline{AD} + \overline{EF} + \overline{FB}) \times \overline{AD}}{2} = \frac{27}{2} .$$

Portanto, a área da região sombreada é igual a $13,50\,m^2$, uma vez que

$$(\overline{AD} + \overline{EF} + \overline{FB}) \times \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AD} ,$$

é a área do retângulo $ABCD$.

Questão 4 ***20 pontos***

Claudina guardou no seu cofrinho moedas de 50 *centavos e moedas de* 1 *real. Ela tem* 121 *moedas e reparou que, se trocasse cada moeda de* 50 *centavos que tem por uma moeda de* 1 *real, e se trocasse cada moeda de* 1 *real que tem por uma moeda de* 50 *centavos, ganharia* 10 *reais e* 50 *centavos. Quanto dinheiro tem a Claudina no cofrinho?*

Resolução

Vamos denotar por x a quantidade de moedas de 50 centavos, por y a quantidade de moedas de 1 real, e por T o valor em reais guardados no cofrinho. Assim, podemos escrever duas equações:

$$x + y = 121 \qquad \text{e} \qquad T = 0,50 \times x + y \,.$$

Considerando agora as trocas das moedas, e sabendo que Claudina terá um ganho de 10 reais e 50 centavos com essas trocas, temos as seguintes equações:

$$x + y = 121 \qquad \text{e} \qquad (\, x + 0,50 \times y \,) - (\, 0,50 \times x + y \,) = 10,50 \,,$$

isto é, ficamos com as equações:

$$x + y = 121 \qquad \text{e} \qquad 0,50 \times x - 0,50 \times y = 10,50 \,.$$

Da segunda equação temos $x = y + 21$, que substituindo o valor de x na primeira equação, obtemos

$$y + 21 + y = 121 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 50 \,.$$

Assim, temos 50 moedas de 1 real e 71 moedas de 50 centavos. Portanto, Claudina tem guardado no cofrinho um total de 85 reais e 50 centavos.

Questão 5 ***20 pontos***

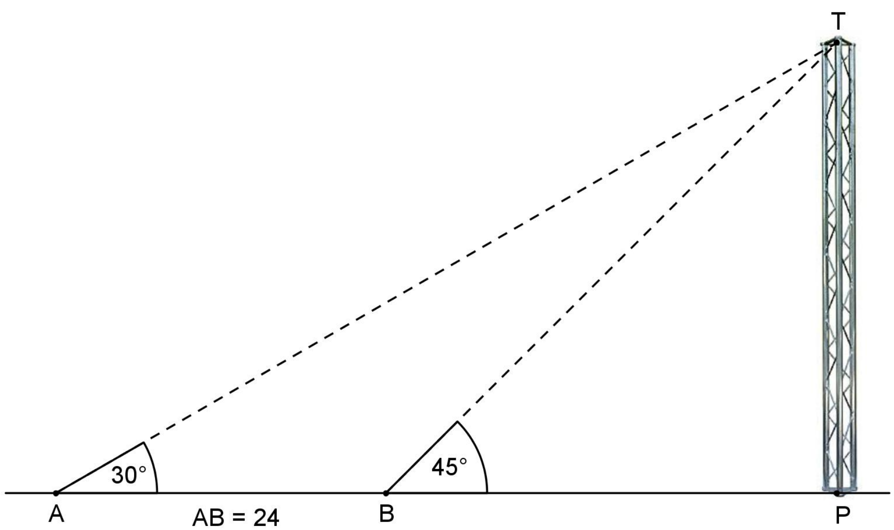
Uma pessoa quer saber a altura de uma torre de telefonia celular da qual não tem acesso. Para tal, demarca, em linha reta a partir do pé da torre e no mesmo nível do pé da torre, dois pontos distantes 24 metros. Em cada um destes pontos, com um teodolito (medidor de ângulos e distâncias) apontado para o topo da torre mede os ângulos de 30^o *e* 45^o*, respectivamente.*

(a) Esboçar um desenho da situação descrita no problema acima.

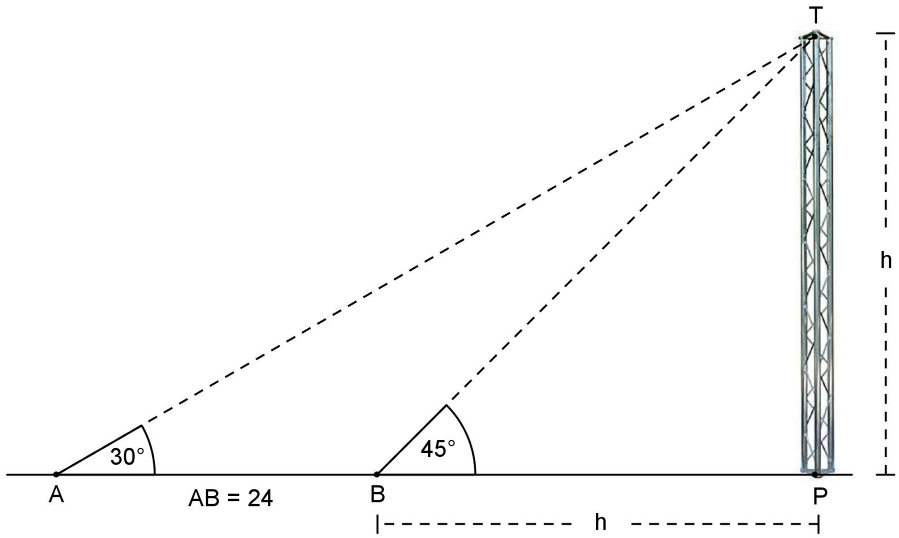
(b) Calcular a altura da torre. Considere, para efeito de cálculo, $\tan(30^o) \approx 0,58$.

Resolução

(a) Sejam A e B os dois pontos distantes 24 metros nos quais foram obtidas as medidas de 30^o e 45^o, respectivamente. Como estes pontos foram marcados em linha reta a partir do pé da torre, o ponto mais próximo da torre é o ponto que corresponde ao maior ângulo, ou seja, o ponto B está mais próximo da torre. Assim a situação descrita na questão é representada pela figura a seguir, onde os pontos T e P representam o topo e o pé da torre, respectivamente.



(b) Como o triângulo BPT é retângulo em P e o ângulo em B é igual a 45^o, obtemos que o ângulo em T deste triângulo é também igual a 45^o, portanto, o triângulo BPT é isósceles. Desse modo, a medida do segmento TP indica a altura da torre, que é igual à distância do pé da torre P ao ponto B, isto é, $h = \overline{TP} = \overline{PB}$, como ilustra a figura a seguir.



No triângulo retângulo APT temos

$$\tan(30^o) \; = \; \frac{h}{24 \, + \, h} \, .$$

Considerando a aproximação $\tan(30^o) \approx 0,58$, obtemos

$$0,58 \; \approx \; \frac{h}{24 \, + \, h} \quad \Longleftrightarrow \quad 24 \times 0,58 \; + \; 0,58 \times h \; \approx \; h \quad \Longleftrightarrow \quad h \; \approx \; \frac{24 \times 0,58}{1 \, - \, 0,58}$$

Portanto, a altura da torre é de aproximadamente $33,14$ metros.

Questão 6 ***20 pontos***

Vamos denotar a altura de uma pessoa por h em metros e a massa por M em quilogramas. O índice de massa corporal, que denotamos por I, é o quociente entre a massa e a altura ao quadrado, isto é,

$$I = \frac{M}{h^2},$$

que é utilizado para estimar a quantidade de gordura de uma pessoa.

(a) Determine o índice de massa corporal de uma pessoa que tem uma massa de 80 quilogramas e uma altura de $1,60$ metros.

(b) Para uma altura fixa, esboçar um gráfico da variação do índice de massa corporal I em função da massa M.

(c) Para um índice de massa corporal fixo, esboçar um gráfico da variação da massa M em função da altura h.

Resolução

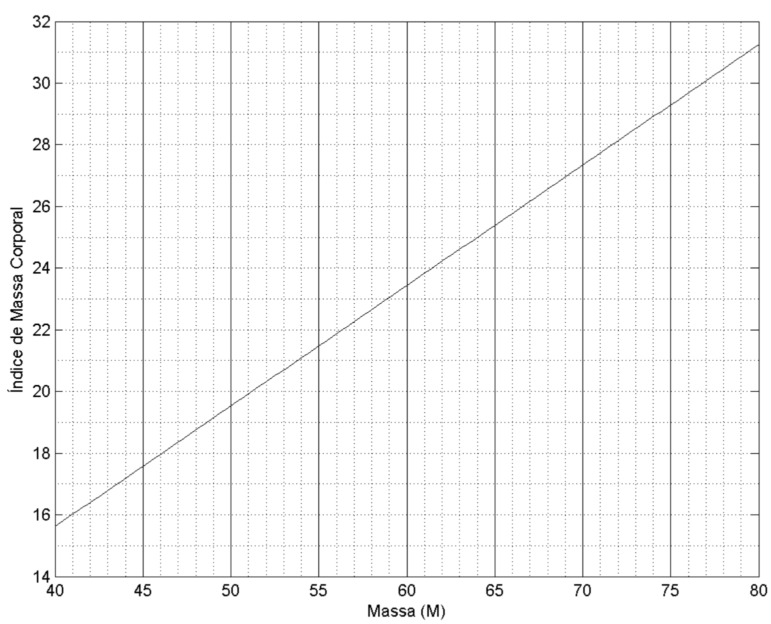
(a) O índice de massa corporal dessa pessoa é calculado da forma:

$$I = \frac{80}{1,6 \times 1,6} = \frac{80}{16 \times 16 \times 10^{-2}} = \frac{5}{16 \times 10^{-2}} = \frac{500}{16} = \frac{250}{8} = \frac{125}{4} = 31 + \frac{1}{4} = 31,25 .$$

(b) Note que para uma altura fixa, temos $h^2 =$ constante, que vamos denotar por k. Assim, o índice de massa corporal em função da massa M fica escrito da forma:

$$I(M) = \frac{M}{k} .$$

Portanto, o índice de massa corporal é uma função linear da massa M, cujo gráfico é uma reta. Tomando por exemplo $h = 1,6\,m$, na figura abaixo temos a representação gráfica do índice de massa corporal em função da massa M.



(c) Note que para um índice de massa corporal fixo, isto é, $I =$ constante, que vamos denotar por C. Assim, a massa da pessoa em função da altura h fica escrita da forma:

$$M(h) = C \times h^2 .$$

Portanto, a massa é uma função quadrática da altura h, cujo gráfico é uma parabola. Tomando por exemplo $C = 22$, na figura abaixo temos a representação gráfica da massa corporal em função da altura h.