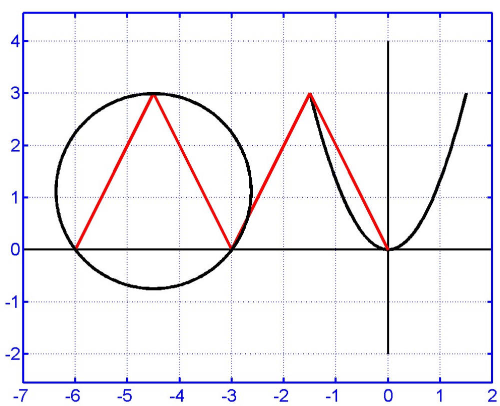
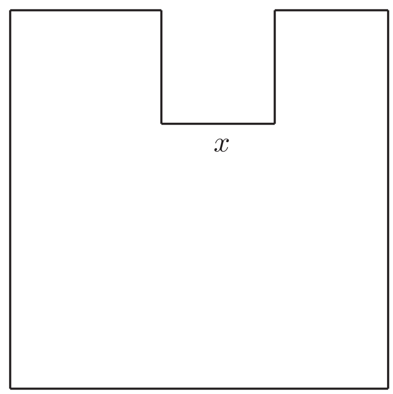


Gabarito da Prova da Segunda Fase – Nível Alfa

Questão 1 ***20 pontos***

Considere um quadrado com $0,25\,m^2$ *de área, do qual retiramos um pequeno quadrado com lado medindo* $x\,cm$*, como mostra a figura abaixo.*



Determine quanto mede o lado do quadradinho retirado se a nova figura tem:

(a) *um perímetro de* $2,5\,m$.

(b) *um perímetro que pode estar entre* $2\,m$ *e* $3\,m$.

(c) *uma área de* $0,16\,m^2$.

Resolução

(a) Denotando por L o lado do quadrado e por P o perímetro da nova figura, temos que

$$P \;=\; 3L + L - x + 3x \;=\; 2,5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; \frac{2,5\;-\;4L}{2} \;=\; \frac{2,5\;-\;4\times 0,5}{2} \;=\; 0,25\,m\;,$$

uma vez que $L \;=\; 0,5$ metros, pois $L^2 \;=\; 0,25\,m^2$ que é a área do quadrado.

(b) Do item (b) sabemos que o perímetro da nova figura é escrito em função do lado do quadradinho da seguinte forma:

$$P \;=\; 4L \;+\; 2x\;.$$

Impondo a condição $2 \;<\; P \;<\; 3$, obtemos

$$2 \;<\; 4L+2x \;<\; 3 \quad\Longleftrightarrow\quad 2 \;<\; 2+2x \;<\; 3 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \;<\; 2x \;<\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 0 \;<\; x \;<\; \frac{1}{2}\,.$$

(c) Denotando por A_n a área da nova figura, temos que

$$A_n \;=\; 0,25 \;-\; x^2 \;=\; 0,16 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 \;=\; 0,25 \;-\; 0,16 \quad\Longleftrightarrow\quad x \;=\; 0,3\,m\;.$$

Questão 2 ***20 pontos***

(a) *Mostre que o número natural* $m = 12^4 - 11^4$ *é divisível por* 23.

(b) *De um modo geral, mostre que se* n *é um número natural, então* $(n+1)^4 - n^4$ *é divisível por* $2n + 1$.

(c) *É possível encontrar um número natural* n *de modo que* $(n+1)^4 - n^4$ *seja um número primo?*

Resolução

(a) Fazendo uso do quadrado da diferença, obtemos

$$12^4 - 11^4 = (12^2 - 11^2)(12^2 + 11^2) = (12 - 11)(12 + 11)(12^2 + 11^2) = 23(12^2 + 11^2)\,.$$

Portanto, mostramos que o número natural $m = 12^4 - 11^4$ é divisível por 23.

(b) De modo análogo, utilizando o quadrado da diferença, obtemos

$$\begin{aligned}(n+1)^4 - n^4 &= [(n+1)^2 - n^2][(n+1)^2 + n^2] \\ &= ((n+1) - n)((n+1) + n)[(n+1)^2 + n^2] \\ &= (2n + 1)[(n+1)^2 + n^2]\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que o número natural $(n + 1)^4 - n^4$ é múltiplo de $2n + 1$, isto é, $2n + 1$ divide o número natural $(n + 1)^4 - n^4$.

(c) Pelo resultado do item (b), temos que não existe um número natural n de modo que $(n + 1)^4 - n^4$ seja um número primo, uma vez que $(2n + 1) > 1$ e $(n+1)^2 + n^2 > 1$ para todo n natural. Assim, temos que $(n + 1)^4 - n^4$ é um número natural composto, isto é, não é um número primo.

Questão 3 ***20 pontos***

Ao final da primeira fase de um campeonato de futebol com seis equipes, somando as pontuações das equipes, obtemos 35 pontos. Considerando que cada equipe jogou com todos os demais adversários apenas uma vez, determine quantos empates aconteceram, sabendo que cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e que derrotas não pontuam.

Resolução

Como temos seis equipes, e cada equipe jogou com todos demais adversários apenas uma vez, no total são quinze jogos, que podem ser obtidos pela combinação de seis equipes duas a duas ou pela árvore de possibilidades.

Vamos denotar por N_e o número de empates e por N_v o número de vitórias. Como cada vitória conta três pontos para a equipe vencedora e cada empate conta um ponto para cada uma das equipes que se enfrentaram, obtemos as seguintes equações:

$$N_e + N_v = 15 \qquad \text{e} \qquad 2N_e + 3N_v = 35\,.$$

Da primeira equação obtemos, $N_v = 15 - N_e$, que substituída na segunda equação tem–se:

$$2N_e + 3(15 - N_e) = 35 \iff 2N_e + 45 - 3N_e = 35 \iff N_e = 10\,.$$

Portanto, tivemos 10 empates e 5 vitórias.

Questão 4 ***20 pontos***

Determine quatro números inteiros, digamos $a < b < c < d$, de modo que somados dois a dois fornecem os seguintes resultados:

$$-1, 2, 4, 7, 9, 12 \ .$$

Resolução

Considerando $a < b < c < d$, temos que as três maiores somas são dadas por:

$$c + d > b + d > b + c \,,$$

e a menor soma que é dada por $a + b$. Assim, temos as seguintes equações:

$$c + d = 12 \quad , \quad b + d = 9 \quad , \quad b + c = 7 \quad \text{e} \quad a + b = -1 \,,$$

que são as únicas equações que fornecem o resultado desejado.

Da primeira equação e da terceira equação, obtemos

$$d = 12 - c \qquad \text{e} \qquad b = 7 - c \,,$$

que substituídas na segunda equação, obtemos

$$b + d = 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7 - c + 12 - c = 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 5 \,.$$

Assim, temos que $b = 2$ e $d = 7$. Da equação $a + b = -1$, obtemos $a = -3$.

Portanto, os quatro números inteiros procurados são:

$$a = -3 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 5 \quad \text{e} \quad d = 7 \ .$$

Questão 5 ***20 pontos***

Um tanque de combustível, cuja capacidade é de 1500 litros, contém 900 litros de uma mistura formada por 30 % de álcool e 70 % de gasolina.

(a) Completando a capacidade do tanque com gasolina, qual é a porcentagem de álcool na mistura resultante?

(b) Quantos litros de gasolina devem ser colocados no tanque de modo que a mistura resultante tenha 20 % de álcool?

Resolução

(a) Na mistura atual, temos 30 % de álcool que corresponde a 270 litros, e 70 % de gasolina que corresponde a 630 litros. Assim, completando a capacidade do tanque com gasolina, temos que

$$\begin{array}{rcr} 1500\,l & \longrightarrow & 100\,\% \\ 270\,l & \longrightarrow & x\,\% \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{270 \times 100}{1500} = 18\,\% \,.$$

Portanto, na mistura resultante teremos 18 % de álcool.

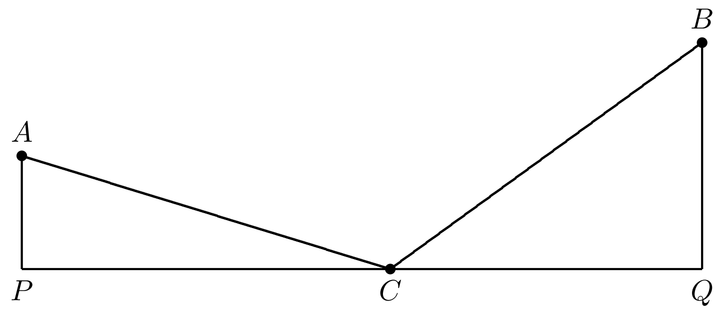
(b) Queremos colocar gasolina na mistura atual, de modo que a mistura resultante tenha 20 % de álcool, isto é, 270 litros de álcool deve corresponder a 20 % do total de combustível. Vamos denotar por x a quantidade de litros de combustível que deverá ter no tanque. Assim, temos que

$$\begin{array}{rcr} x\,l & \longrightarrow & 100\,\% \\ 270\,l & \longrightarrow & 20\,\% \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{270 \times 100}{20} = 1350\,l \,.$$

Portanto, devemos colocar 450 litros de gasolina na mistura atual para ficar com uma mistura resultante com 20 % de álcool.

Questão 6 ***20 pontos***

Considere duas tirolesas que partem dos pontos A e B, no mesmo instante, com uma mesma velocidade constante de V_0 metros por segundos atingindo o ponto de chegada C ao mesmo tempo, como ilustra a figura abaixo. Sabemos que $\overline{AP} = 20$ metros, $\overline{BQ} = 40$ metros e $\overline{PQ} = 100$ metros.



(a) *Determine algebricamente a distância entre os pontos P e C.*

(b) *Qual é a velocidade das tirolesas, sabendo que atingem o ponto C em 30 segundos ?*

(c) *Descreva um método para encontrar o ponto C por meio de construções geométricas, isto é, com régua sem graduação e compasso.*

Resolução

(a) Como a velocidade V_0 é a mesma para as duas tirolesas, e considerando também que elas partem e chegam no mesmo instante, temos $\overline{AC} = \overline{BC} = a$. Chamando $\overline{PC} = x$ e $\overline{CQ} = y$, temos as seguintes equações:

$$x + y = 100 \qquad \text{e} \qquad x^2 + 20^2 = a^2 = y^2 + 40^2 \,.$$

Da segunda equação, e sabendo que $y = 100 - x$, obtemos

$$x^2 - (100 - x)^2 = 1200 \iff x^2 - (x^2 - 200x + 10000) = 1200 \iff 200x = 11200$$

Portanto, temos $x = \overline{PC} = 56$ metros.

(b) Para calcular a velocidade das tirolesas, vamos calcular o valor de $\overline{AC} = \overline{BC} = a$:

$$a^2 = 20^2 + x^2 \iff a = \sqrt{20^2 + 56^2} = \sqrt{3536} = 4\sqrt{221} \text{ metros} .$$

Desse modo, a velocidade das tirolesas é dada por:

$$V_0 = \frac{4\sqrt{221}}{30} = \frac{2\sqrt{221}}{15} \approx 1,98 \text{ metros por segundos} .$$

(c) O ponto C pode ser obtido pela interseção da mediatriz do segmento AB e o segmento PQ, como ilustra a figura abaixo. Note que essa construção geométrica pode ser feita com uma régua sem graduação e compasso.