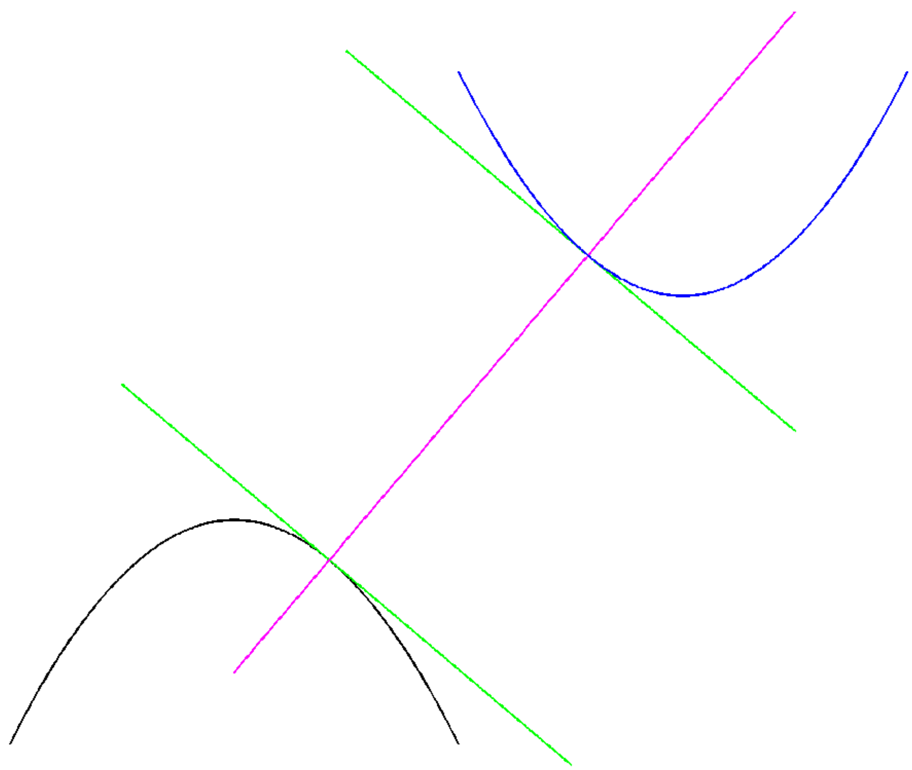


Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Beta

Questão 1 ***20 pontos***

(a) *Considere na figura abaixo*

$$\overline{0A} = 60\,cm \quad , \quad \overline{AB} = 40\,cm \quad , \quad \overline{BC} = 20\,cm \quad , \quad \widehat{0AB} = 60^o \quad e \quad \widehat{DBC} = 45^o\,,$$

onde a reta suporte do segmento BD é paralela à reta suporte do segmento $0A$.

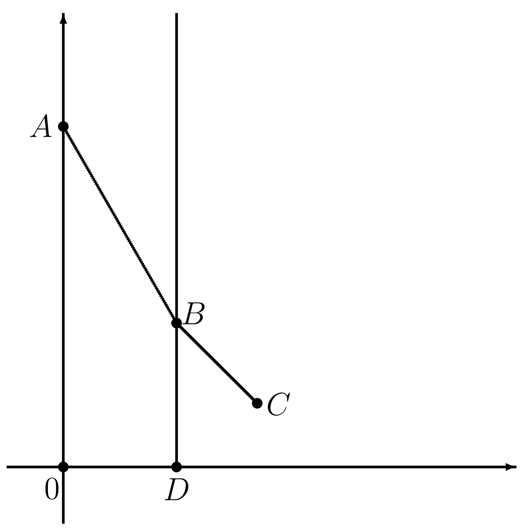
Determine as coordenadas do ponto $C = (a, b)$.

(b) *Na figura abaixo, chamando*

$$L_1 = \overline{0A} \quad , \quad L_2 = \overline{AB} \quad , \quad L_3 = \overline{BC} \quad , \quad \theta = \widehat{0AB} \quad e \quad \alpha = \widehat{DBC}\,,$$

onde a reta suporte do segmento BD é paralela à reta suporte do segmento $0A$.

Determine as coordenadas do ponto $C = (a, b)$ em função de L_1, L_2, L_3, θ e α.



Resolução

Na figura abaixo a medida do segmento EB é dado por:

$$\overline{EB} = \overline{AB}\sin(60^o) = 20\sqrt{3}\,cm\,.$$

Na figura abaixo a medida do segmento AE é dado por:

$$\overline{AE} = \overline{AB}\cos(60^o) = 20\,cm\,.$$

Desse modo, o ponto B é dado por:

$$B = \left(20\sqrt{3}\,,\,40\right)\,.$$

Na figura abaixo a medida do segmento FC é dado por:

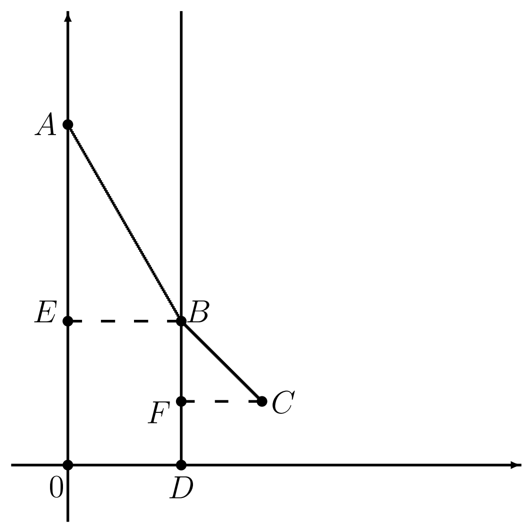
$$\overline{FC} = \overline{BC}\sin(45^o) = 10\sqrt{2}\,cm\ .$$

Na figura abaixo a medida do segmento BF é dado por:

$$\overline{BF} = \overline{BC}\cos(45^o) = 10\sqrt{2}\,cm\ .$$

Portanto, o ponto C é dado por:

$$C = \left(20\sqrt{3} + 10\sqrt{2}\,,\, 40 - 10\sqrt{2}\right)\ .$$



A partir dos cálculos realizados acima, as coordenadas do ponto $C = (a, b)$ em função dos parâmetros L_1, L_2, L_3, θ e α, são calculadas da seguinte forma:

Na figura acima a medida do segmento EB e do segmento AE são dadas por:

$$\overline{EB} = L_2\sin(\theta) \qquad \text{e} \qquad \overline{AE} = L_2\cos(\theta)\ .$$

Desse modo, o ponto B é dado por:

$$B = (L_2\sin(\theta)\,,\, L_1 - L_2\cos(\theta))\ .$$

Na figura acima a medida do segmento FC e do segmanto BF são dadas por:

$$\overline{FC} = L_3\sin(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \overline{BF} = L_3\cos(\alpha)\ .$$

Portanto, o ponto C é dado por:

$$C = (L_2\sin(\theta) + L_3\sin(\alpha)\,,\, L_1 - L_2\cos(\theta) - L_3\cos(\alpha))\ .$$

Questão 2 ***20 pontos***

(a) *Determine o lugar geométrico no plano de Argand–Gauss dos números complexos* z *que satisfazem a seguinte equação* $|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,|$.

(b) *Mostre que as imagens geométricas dos números complexos* 0, z *e* $\bar{z}$ *no plano de Argand–Gauss, onde* z *satisfaz a equação dada no item (a), são os vértices de um triângulo equilátero .*

Resolução

Escrevendo o número complexo $z = a + bi$, para $a, b \in I\!R$, temos

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad |\,z - \bar{z}\,| = \sqrt{4b^2}\,.$$

Considerando a equação dada no questão, temos

$$|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,| \iff |\,z\,|^2 = |\,z - \bar{z}\,|^2 \iff a^2 + b^2 = 4b^2 \iff a^2 - 3b^2 = 0\,.$$

Assim, podemos escrever b em função de a ou escrever a em função de b, como a seguir:

$$b = \pm |\,a\,| \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{ou} \qquad a = \pm |\,b\,| \sqrt{3}\,.$$

Desse modo, os números complexo que satisfazem a equação $|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,|$ podem ser escritos das seguintes formas:

$$z = a + |\,a\,| \frac{\sqrt{3}}{3} i \qquad \text{ou} \qquad z = a - |\,a\,| \frac{\sqrt{3}}{3} i\,,$$

para $a \in I\!R$. Assim, o lugar geométrico no plano numérico dos números complexos

$$z = a + |\,a\,| \frac{\sqrt{3}}{3} i$$

é representado pelo gráfico da função modular definida da forma:

$$f(x) = |\,x\,| \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x \in I\!R\,.$$

De modo análogo, o lugar geométrico no plano numérico dos números complexos

$$z = a - |\,a\,| \frac{\sqrt{3}}{3} i$$

é representado pelo gráfico da função modular definida da forma:

$$g(x) = -|\,x\,| \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x \in I\!R\,.$$

De modo análogo, podemos também escrever os números complexo que satisfazem a equação $|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,|$ das seguintes formas:

$$z = |\,b\,|\sqrt{3} + bi \qquad \text{ou} \qquad z = -|\,b\,|\sqrt{3} + bi\,;$$

para $b \in I\!R$.

Vamos dizer que o ponto A do plano numérico seja a imagem do número complexo z e o ponto B seja a imagem do numérico complexo $\bar{z}$. Assim, os lados do triângulo OAB têm as seguintes medidas:

$$\overline{OA} = |\,z\,| \quad , \quad \overline{OB} = |\,\bar{z}\,| \quad \text{e} \quad \overline{AB} = |\,z - \bar{z}\,| = 2\,|\,b\,|\ .$$

Como $|\,z\,| = |\,\bar{z}\,|$ e o número complexo z satisfaz a equação $|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,|$, portanto o triângulo OAB é um triângulo equilátero.

É importante observar que qualquer de uma das duas maneiras que podemos escrever os números complexos que satisfazem a equação $|\,z\,| = |\,z - \bar{z}\,|$, tem–se $|\,z\,| = 2\,|\,b\,|$.

Questão 3 ***20 pontos***

Determine os valores do parâmetro p de modo que a função quadrática

$$f(x) = x^2 + px + p$$

(a) possua duas raízes complexas.

(b) possua duas raízes reais.

(c) possua somente uma única raiz real.

Em cada uma das situações, faça o esboço do gráfico da função f.

Resolução

As raízes da função quadrática f podem ser escritas da seguinte forma:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4p}}{2} .$$

Vamos analisar os sinal do discriminante $\Delta = p^2 - 4p$, que depende do parâmetro p.

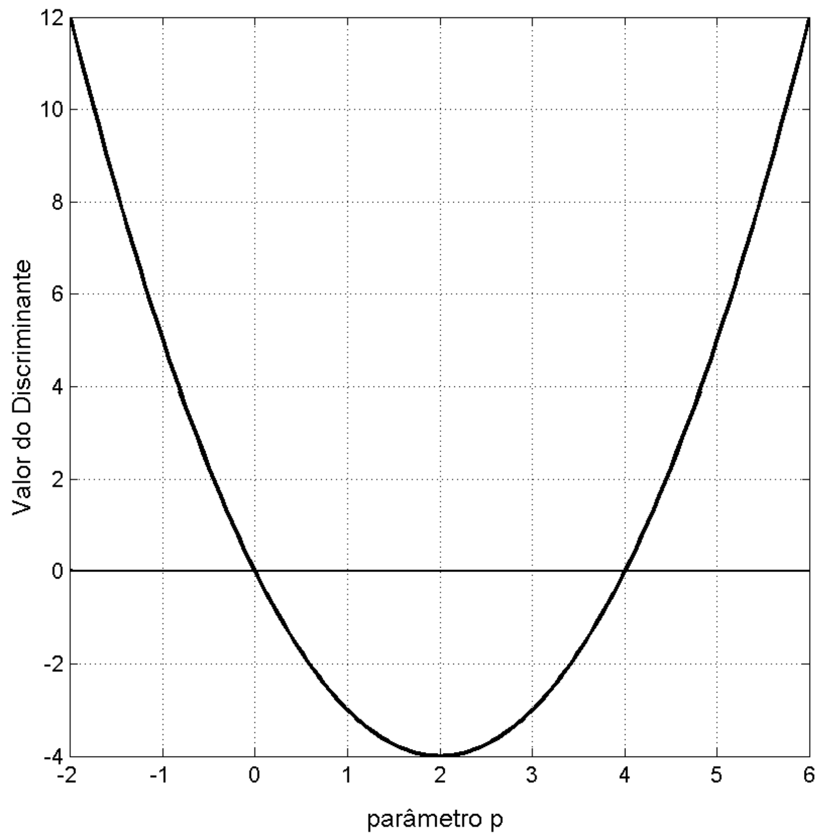
Inicialmente vamos encontrar os valores de p para os quais o discriminante seja igual a zero.

$$\Delta = p^2 - 4p = p(p - 4) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = 0 \quad \text{ou} \quad p = 4 .$$

Desse modo, para $p = 0$ ou $p = 4$, tem–se que a função quadrática f possui somente uma raiz real, com multiplicidade algébrica igual a dois.

Observamos que o discriminante também pode ser visto como uma função quadrática do parâmetro p de concavidade voltada para cima, como ilustra a figura abaixo. Assim, para $0 < p < 4$ o discriminante é negativo. Portanto a função quadrática f possui duas raízes complexas.

Finalmente, para $p < 0$ ou $p > 4$, o discriminante é positivo. Portanto, a função quadrática f possui duas raízes reais distintas.


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
Valor do Discriminante
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
parâmetro p

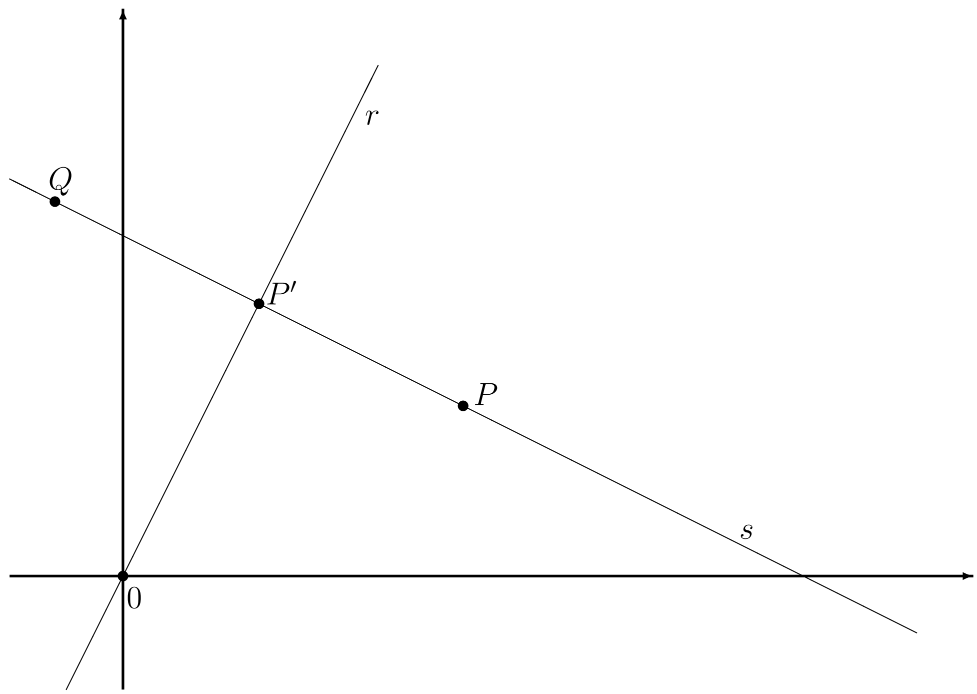
Questão 4 ***20 pontos***

Considere na figura abaixo a reta r definida pela equação $y = 2x$ e o ponto $P = (6, 3)$.

(a) Determine as coordenadas do ponto P' obtido pela projeção do ponto P sobre a reta r.

(b) Determine as coordenadas do ponto Q obtido pela reflexão do ponto P em torno da reta r.

(c) Determine a área do triângulo $0PQ$.



Resolução

Sabemos que o ponto P' é a intersecção da reta r com a reta s, que é perpendicular à reta r passando pelo ponto P. A equação da reta s é definida pela seguinte equação:

$$y = -\frac{x}{2} + 6 .$$

Portanto, para determinar as coordenadas do ponto P' temos que obter a solução da seguinte sistema linear

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = -\frac{x}{2} + 6 .$$

Assim, o ponto P' é dado por:

$$P' = \left(\frac{12}{5} , \frac{24}{5} \right) .$$

Como o ponto Q é a reflexão do ponto P em torno da reta r, temos que determinar o ponto Q pertencente à reta s de modo que a distância do ponto Q ao ponto P' seja igual a distância do ponto P ao ponto P', que vamos denotar da seguinte forma:

$$d(Q,P') \;=\; d(P,P')\,.$$

Sabemos que a distância do ponto P ao ponto P' é dada por:

$$d(P,P') \;=\; \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 6\right)^2 + \left(\frac{24}{5} - 3\right)^2} \;=\; \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} \;=\; \frac{\sqrt{405}}{5} \;=\; \frac{9\sqrt{5}}{5}\,.$$

Denotando o ponto $Q = (a,b)$ e considerando $d(Q,P') = d(P,P')$, temos que o ponto P' é o ponto médio do segmento PQ. Assim, sabemos que

$$\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right) \;=\; \left(\frac{a+6}{2}, \frac{b+3}{2}\right)\,.$$

Desse modo, obtemos as equações:

$$\frac{12}{5} \;=\; \frac{a+6}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad a \;=\; -\frac{6}{5}\,,$$

e

$$\frac{24}{5} \;=\; \frac{b+3}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad b \;=\; \frac{33}{5}$$

Portanto, o ponto Q é dado por:

$$Q \;=\; \left(-\frac{6}{5}, \frac{33}{5}\right)\,.$$

Finalmente, a área do triângulo $0PQ$, que vamos denotar por A_t, é calculada da forma:

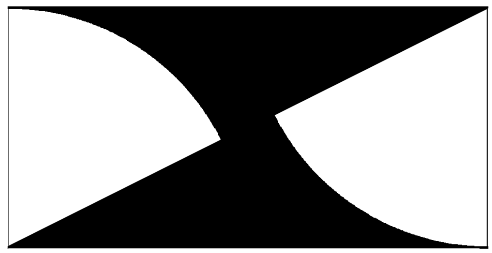
$$A_t \;=\; \frac{\overline{PQ} \times \overline{0P'}}{2} \;=\; \overline{PP'} \times \overline{0P'} \;=\; \frac{9\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{45}}{5} \;=\; \frac{108}{5}\,cm^2\,;$$

onde $\overline{0P'}$ é a altura do triângulo $0PQ$ com relação á base PQ, que é dada por:

$$\overline{0P'} \;=\; d(0,P') \;=\; \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} \;=\; \frac{\sqrt{720}}{5} \;=\; \frac{4\sqrt{45}}{5}\,.$$

Questão 5 ***20 pontos***

Considere que na figura abaixo temos um retângulo com o lado menor mediando L centímetros e o lado maior medindo $L\sqrt{3}$ centímetros. Note que na figura abaixo os setores circulares têm raio igual a L centímetros. Determine a área da região colorida.



Resolução

A diagonal do retângulo, que vamos denotar por d, mede $2L$ centímetros. Assim, o ângulo interno do setor circular, que vamos denotar por θ, é calculado da seguinte forma:

$$\cos(\theta) = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{3} .$$

Desse modo, a área de cada setor circular, que vamos denotar por A_s, é dada por:

$$A_s = \frac{\pi L^2}{6} cm^2 .$$

Portanto, a área da região colorida, que vamos denotar por A_c, é dada por:

$$A_c = A_r - 2A_s = L^2\sqrt{3} - \frac{\pi L^2}{3} = L^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) cm^2 ,$$

onde A_r é a área do retângulo.