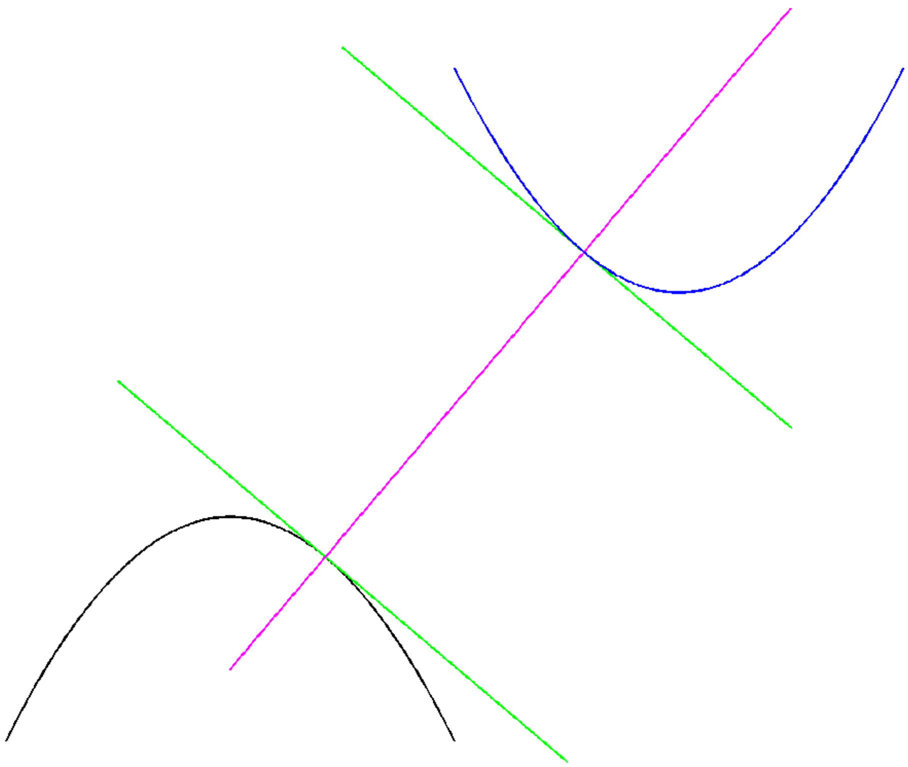


Gabarito da Prova da Primeira Fase – Nível Alfa

Questão 1 ***20 pontos***

Na Tabela 1 temos a progressão mensal para o Imposto de Renda Pessoa Física 2014–2015.

Tabela 1: Imposto de Renda Pessoa Física 2014–2015.

Base de Cálculo	**Alíquota**	**Parcela a Deduzir**
Até $R\$ 1.903,98$	Isento	* * * * *
De $R\$ 1.903,99$ a $R\$ 2.826,65$	$7,5\%$	$R\$ 142,80$
De $R\$ 2.826,66$ a $R\$ 3.751,05$	$15,0\%$	$R\$ 354,80$
De $R\$ 3.751,06$ a $R\$ 4.664,68$	$22,5\%$	$R\$ 636,13$
Acima de $R\$ 4.664,68$	$27,5\%$	$R\$ 869,36$

Considere um contribuinte que tem um salário mensal de $R\$ 2.800,00$.

(a) Determine o valor do imposto de renda a ser pago por esse contribuinte.

(b) No caso desse contribuinte ter um aumento salarial de 10%, determine o valor do imposto de renda a ser pago

(c) Considerando o desconto do imposto de renda, determine o aumento percentual real do rendimento mensal desse contribuinte.

Caso seja necessário, utilize uma calculadora de bolso para fazer os cálculos.

Resolução

(a) Para um salário de $R\$ 2.800,00$ temos uma alíquota de $7,5\%$ com uma parcela a deduzir de $R\$ 142,80$. Assim, o imposto devido, que vamos denota por ID, é calculado da forma:

$$I_D = 2.800,00 \times 0,075 - 142,80 = 210,0 - 142,80 = 67,20 .$$

Portanto, esse contribuinte tem a pagar um imposto de renda no valor de $R\$ 67,20$.

(b) Com aumento salarial de 10%, seu salário passa a ser $R\$ 3.080,00$, assim o imposto devido é calculado da forma:

$$I_D = 3.080,00 \times 0,15 - 354,80 = 462,0 - 354,80 = 107,20 .$$

Portanto, esse contribuinte tem a pagar um imposto de renda no valor de $R\$ 107,20$.

(c) Na situação descrita no item (a), o salário liquido, que vamos denotar por S_a, é calculado da forma:

$$S_a = 2.800,00 - 67,20 = 2.732,80 ,$$

e na situação descrita no item (b), o salário liquido, que vamos denotar por S_b, é calculado da forma:

$$S_b = 3.080,00 - 107,20 = 2.972,80 .$$

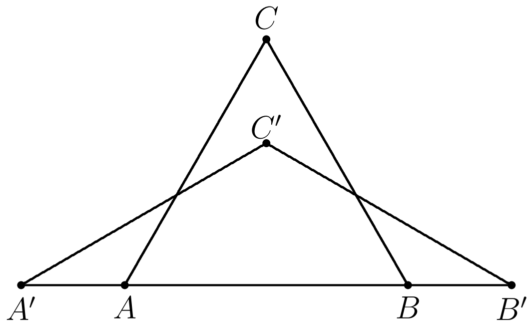
Finalmente, considerando o salário liquido, em cada uma das situações, podemos determinar o aumento percentual do rendimento mensal, que vamos denotar por R_m, da forma:

$$R_m = \frac{(S_b - S_a) \times 100}{S_a} = \frac{240,00 \times 100}{2.732,80} \approx 8,78\% .$$

Portanto, o aumento percentual do rendimento mensal foi de aproximadamente $R\$ \, 8,78\%$, que corresponde ao aumento real de salário, descontado o imposto de renda, de $R\$ \, 240,00$.

Questão 2 ***20 pontos***

Considere um triângulo equilátero ABC com os lados medindo L centímetros. Quando duplicamos um dos ângulos internos, mantendo dois lados iguais a L, obtemos um triângulo isósceles $A'B'C'$, como ilustra a figura abaixo.



(a) Calcule a medida do lado $A'B'$ do triângulo isósceles.

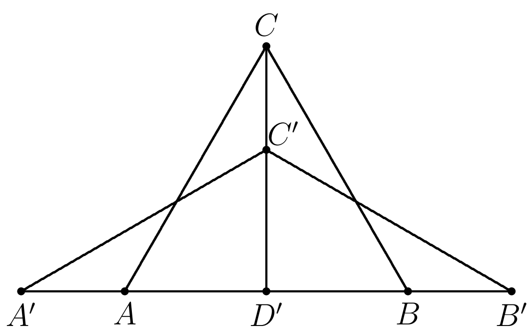
(b) Determine a razão entre as áreas do triângulo equilátero e do triângulo isósceles.

Resolução

(a) No triângulo retângulo $A'C'D'$ o ângulo $\widehat{C'A'D'}$ é igual a 30^o. Denotando por x o comprimento do segmento $A'D'$, temos

$$x = L\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} L\, cm\ .$$

Assim, o comprimento do lado $A'B'$ do triângulo isósceles é igual a $2x = \sqrt{3}L\, cm$.



(b) Vamos denotar por h_1 a altura do triângulo equilátero ABC e por h_2 a altura do triângulo isósceles $A'B'C'$, que são dadas por:

$$h_1 = L\sin(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} L\, cm \qquad \text{e} \qquad h_2 = L\sin(30^o) = \frac{L}{2}\, cm\ .$$

Vamos denotar por A_1 a área do triângulo equilátero ABC e por A_2 a área do triângulo isósceles $A'B'C'$, que são dadas por:

$$A_1 = \frac{Lh_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2\,cm^2 \qquad \text{e} \qquad A_2 = \frac{\sqrt{3}Lh_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2\,cm^2 \,.$$

Portanto, a razão entre as áreas do triângulo equilátero e do triângulo isósceles é igual a 1.

Questão 3 ***20 pontos***

José trabalha em duas empresas diferentes. Na primeira empresa recebe um salário de $R\$\,1.600,00$ e teve um aumento salarial de $6\,\%$. Na segunda empresa recebe um salário de $R\$\,2.400,00$ e teve um aumento salarial de $8\,\%$.

(a) Determine o aumento do rendimento mensal do José em reais.

(b) Determine o aumento percentual do rendimento mensal do José.

Caso seja necessário, utilize uma calculadora de bolso para fazer os cálculos.

Resolução

(a) Considerando as duas empresas José tem um rendimento mensal de $R\$\,4.000,00$. Vamos calcular o salário de José em cada uma das empresas considerando os respectivos aumentos:

$$S_1 \;=\; 1.600,00 + 1.600,00 \times 0,06 \;=\; 1.600,00 \times 1,06 \;=\; 1.696,00\ ,$$

$$S_2 \;=\; 2.400,00 + 2.400,00 \times 0,08 \;=\; 2.400,00 \times 1,08 \;=\; 2.592,00\ .$$

Desse modo, o rendimento mensal com os aumentos é de $R\$\,4.288,00$. Assim, o aumento do rendimento mensal é de $4.000,00 \,-\, 4.288,00 \,=\, 288,00$ reais.

(b) Para calcular o aumento percentual do rendimento mensal do José, temos que determinar qual é o percentual que $R\$\,288,00$ representa em $R\$\,4.000,00$, isto é, basta fazer o seguinte cálculo

$$\frac{288,00}{4.000,00} \times 100 \;=\; 7,2\%\ .$$

Portanto, José teve um aumento de $7,2\%$ no seu rendimento mensal.

Questão 4 ***20 pontos***

(a) Determine o conjunto solução da desigualdade

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} \leq \frac{2x-1}{5}\,.$$

(b) Determine o conjunto solução do sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$$

(c) Apresente uma interpretação geométrica para o problema do item (b).

Resolução

(a) Fazendo algumas manipulações algébricas na desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} &\leq \frac{2x-1}{5} \\
\frac{3(x+3) - 2(x-2)}{6} &\leq \frac{2x-1}{5} \\
\frac{3x+9-2x+4}{6} &\leq \frac{2x-1}{5} \\
\frac{x+13}{6} &\leq \frac{2x-1}{5} \\
5(x+13) &\leq 6(2x-1) \\
5x+65 &\leq 12x-6 \\
71 &\leq 7x \\
x &\geq \frac{71}{7}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução da desigualdade, que vamos denotar por S, é dado por:

$$S = \left\{ x \in I\!R \;/\; x \geq \frac{71}{7} \right\}.$$

(b) Da primeira equação, temos $y = x + 1$, que substituindo na segunda equação, obtemos

$$x^2 - (x + 1) = 1 \iff x^2 - x - 2 = 0 .$$

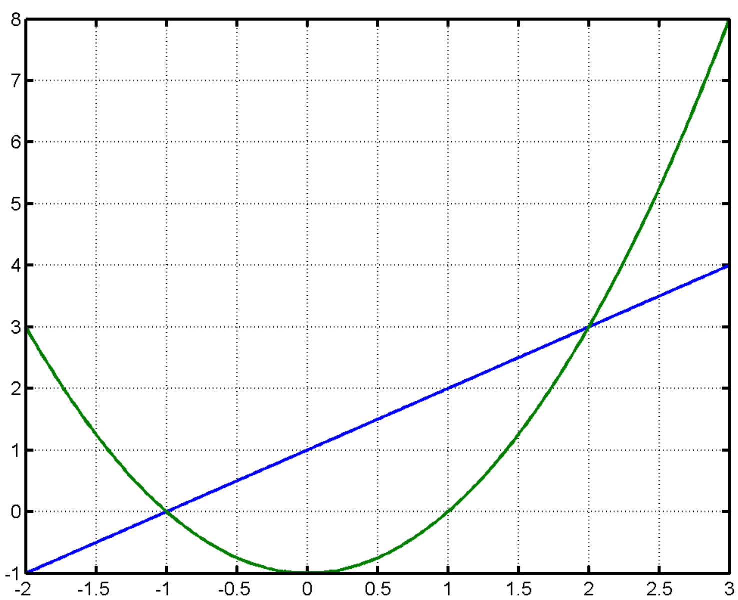
Assim, temos que determinar o conjunto solução da equação quadrática $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são dadas por:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \iff x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2 .$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações, que vamos denotar por S, é formado pelos seguintes pares ordenador

$$S = \{ (-1, 0) \qquad \text{e} \qquad (2, 3) \} .$$

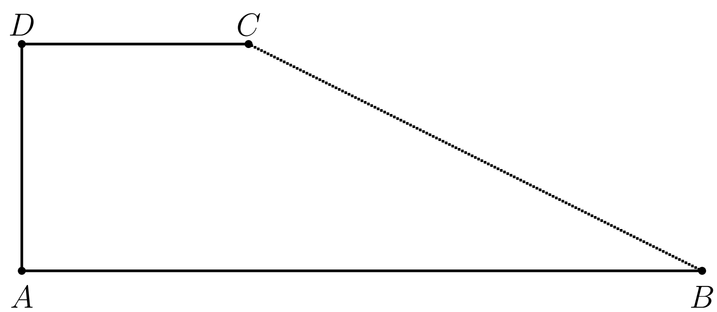
(c) Considerando os pares ordenados como os ponto $A = (-1, 0)$ e $B = (2, 3)$ do plano cartesiano, temos que esses pontos representam a intersecção da reta r dada pela equação $y = x + 1$ com a parábola dada pela equação $y = x^2 - 1$, como ilustra a figura abaixo.



Questão 5 ***20 pontos***

Considere um terreno na forma de um trapézio retângulo, como ilustra a figura abaixo, com as seguintes dimensões

$$\overline{AB} = 90\,m \quad , \quad \overline{AD} = 30\,m \quad e \quad \overline{DC} = 30\,m\ .$$



(a) Sabendo que cada metro quadrado custa $R\$\,200,00$, determine o preço do terreno.

(b) Dividir o terreno em três terrenos, da esquerda para a direita, com $600\,m^2$, $575\,m^2$ e $625\,m^2$, respectivamente, com dois muros paralelos ao lado AD, exibindo o formato e as dimensões de cada terreno.

(c) Dividir o terreno em dois terrenos, de baixo para cima, com $800\,m^2$ e $1000\,m^2$, respectivamente, com um muro paralelo ao lado AB, exibindo o formato e as dimensões de cada terreno.

Resolução

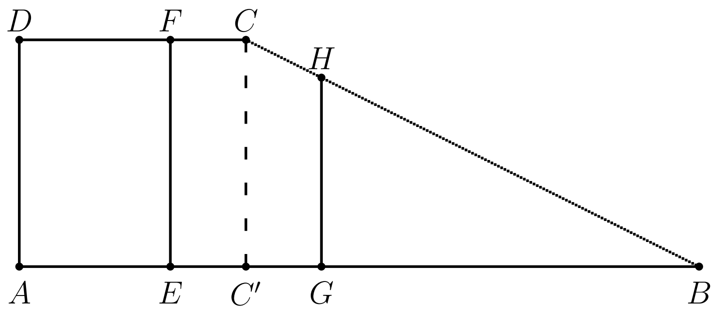
(a) Sabemos que a área do trapézio, que vamos denotar por A_t, é dada por:

$$A_t = \frac{(\,\overline{AB} + \overline{DC}\,) \times \overline{AD}}{2} = \frac{(\,90 + 30\,) \times 30}{2} = 1.800\ m^2\ .$$

Como o terreno tem 1.800 metros quadrados e cada metro quadrado custa $R\$\,200,00$, o preço do terreno, que vamos denotar por P_t, é dado por:

$$P_t = 1.800 \times 200,00 = 360.000,00 \text{ reais}\ .$$

(b) Na figura abaixo, temos que o primeiro terreno da esquerda é o retângulo $ADFE$ que deve ter 600 metros quadrados. Como o lado AD mede 30 metros, basta tomar o lado AE medindo 20 metros, que teremos o terreno com 600 metros quadrados.



Observe que os triângulos $C'BC$ e GBH são semelhantes. Assim, temos

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GB}} \iff \frac{30}{60} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GB}} \iff \overline{GH} = \frac{\overline{GB}}{2}.$$

Assim, o terceiro terreno é o triângulo GBH que deve ter 625 metros quadrados. Logo, denotando por x o comprimento da base GB, obtemos

$$\frac{x^2}{4} = 625 \iff x^2 = 2500 \implies x = 50.$$

Portanto, o terceiro terreno tem o lado GB medindo 50 metros e o lado GH medindo 25 metros.

Finalmente, o segundo terreno é formado pela poligonal $EGHCF$ que mede 575 metros quadrados.

(c) Na figura abaixo, temos que o primeiro terreno de baixo para cima é o trapézio $ABFE$ que deve ter 800 metros quadrados. Vamos denotar x a altura desse trapézio, que é o comprimento do lado AE. Assim, sabemos que o segmento $F'B$ mede $2x$.

Vamos denotar por A_t a área do trapézio $ABFE$. Assim, temos

$$A_t = \frac{(90 - 2x + 90) \times x}{2} = 800 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 90x + 800 = 0 \, .$$

Desse modo, temos que determinar as raízes da equação quadrática acima, que são dadas por:

$$x = \frac{90 \pm \sqrt{8100 - 3200}}{2} = \frac{90 \pm \sqrt{4900}}{2} = \frac{90 \pm 70}{2} \, ,$$

obtendo $x_1 = 10$ e $x_2 = 80$. Note que $\overline{AE} < 30$. Assim, devemos ter $x = \overline{AE} = 10\,m$.

Portanto, o primeiro terreno de baixo para cima é o trapézio $ABFE$ com 800 metros quadrados, e com as seguintes dimensões

$$\overline{AB} = 90\,m \quad , \quad \overline{AE} = 10\,m \quad \text{e} \quad \overline{EF} = 70\,m \, ,$$

e o segundo terreno é o trapézio $EFCD$ com 1000 metros quadrados, e com as dimensões

$$\overline{EF} = 70\,m \quad , \quad \overline{ED} = 20\,m \quad \text{e} \quad \overline{DC} = 30\,m \, .$$