

## Gabarito da Prova da Primeira Fase

**Questão 1** Considere um pedaço de barbante com  $60\text{ cm}$  de comprimento, que é cortado em duas partes. Uma das partes é dobrada na forma de um quadrado, e a outra parte é dobrada na forma de uma circunferência. Determine como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das duas figuras geométricas seja

(a) a **maior** possível.

(b) a **menor** possível.

### Resolução

Denotamos por  $x$  o comprimento da parte que será dobrada na forma de um quadrado e por  $y$  o comprimento da parte que será dobrada na forma de uma circunferência, isto é,

$$60 = x + y \quad \Longleftrightarrow \quad y = 60 - x.$$

Desse modo, a área do quadrado é dada por:

$$A_{\square} = \frac{x^2}{16}. \quad (1)$$

O raio da circunferência, que vamos indicar por  $R$ , é expresso da forma:

$$R = \frac{60 - x}{2\pi}, \quad (2)$$

uma vez que o perímetro da circunferência é  $60 - x = 2\pi R$ .

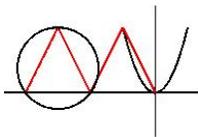
Desse modo, temos que a área da circunferência é dada por:

$$A_{\circ} = \pi R^2 = \frac{(60 - x)^2}{4\pi}. \quad (3)$$

Portanto, a área total das figuras, que vamos denotar por  $A_T$ , é dada por:

$$A_T(x) = A_{\square} + A_{\circ} = \frac{x^2}{16} + \frac{(60 - x)^2}{4\pi}, \quad 0 \leq x \leq 60, \quad (4)$$

que está em função do comprimento  $x$ , e depende do comprimento do barbante  $60\text{ cm}$ .



Note que a área total é uma função quadrática na variável  $x$ , que podemos escrever da seguinte forma:

$$A_T(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{3600 - 120x + x^2}{4\pi} \quad (5)$$

para  $0 \leq x \leq 60$ .

Finalmente, vamos analisar este problema escrevendo a função quadrática  $A_T$  dada na equação (5) da seguinte forma:

$$A_T(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde

$$a = \frac{4 + \pi}{16\pi}, \quad b = -\frac{30}{\pi} \quad \text{e} \quad c = \frac{900}{\pi}.$$

Como  $a > 0$ , sabemos que a função quadrática  $A_T$  assume seu valor mínimo no ponto

$$x^* = -\frac{b}{2a} = \frac{240}{4 + \pi} \text{ cm}, \quad (6)$$

que é o comprimento da parte que será dobrada na forma de um quadrado.

Desse modo, a parte do barbante de comprimento  $y^*$ , que será dobrada na forma de uma circunferência, é dada por:

$$y^* = 60 - x^* = 60 - \frac{240}{4 + \pi} = \frac{60\pi}{4 + \pi} \text{ cm}. \quad (7)$$

Portanto, considerando o corte do barbante da forma:

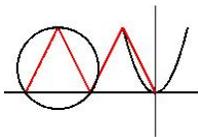
$$x^* + y^* = 60 \text{ cm},$$

temos uma área total mínima.

Da equação (4), que fornece a área total, temos que

$$A_T(x = 0) > A_T(x = 60)$$

Assim, a área máxima é obtida dobrando o barbante de comprimento  $60 \text{ cm}$  na forma de uma circunferência. Note que o resultado está de acordo com o esperado, pois sabemos que a circunferência tem a maior área entre todas as curvas fechadas de perímetro fixo.



**Questão 2** *Divide-se um segmento de comprimento  $L$  em três partes iguais e retira-se a parte central. Para cada um dos segmentos restantes repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais, e assim sucessivamente.*

- (a) *Calcule a soma dos comprimentos dos segmentos retirados após 4 passos.*
- (b) *Determine uma expressão para a soma dos comprimentos dos segmentos retirados após  $n$  passos.*

**Resolução** Vamos descrever o processo através da tabela abaixo:

Passo	Segmentos Retirados	Segmentos Restantes	Medida de cada Segmento
1	1	2	$\frac{L}{3}$
2	2	4	$\frac{L}{3^2}$
3	4	8	$\frac{L}{3^3}$
4	8	16	$\frac{L}{3^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$2^{n-1}$	$2^n$	$\frac{L}{3^n}$

Por simplicidade, vamos denotar por  $S_4$  a soma das medidas dos segmentos retirados na quarto passo. Assim, temos que  $S_4$  é dado por:

$$S_4 = \frac{L}{3} + 2\frac{L}{3^2} + 4\frac{L}{3^3} + 8\frac{L}{3^4} = \frac{L}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} \right) = \frac{65}{81} L .$$

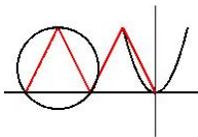
Podemos observar que o somatório que está entre parênteses é a soma dos quatro primeiro termos de uma **progressão geométrica** com primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $r = \frac{2}{3}$ .

De modo análogo, denotando por  $S_n$  a soma das medidas dos segmentos retirados no passo  $n$ . Portanto, temos que  $S_n$  é dado por:

$$S_n = \frac{L}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} \right) = \frac{L}{3} \left( a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) L ,$$

uma vez que o somatório que está entre parênteses é a soma dos  $n$  primeiro termos de uma **progressão geométrica** com primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $r = \frac{2}{3}$ .

Observamos que repetindo esse processo indefinidamente, a soma dos comprimentos dos segmentos retirados será igual a  $L$ .



**Questão 3** Considere o polinômio  $p(x)$  dado pela regra funcional

$$p(x) = x(3 - x)(5 - x).$$

Esboce o gráfico do polinômio  $p(x)$  para todo  $x$  real.

### Resolução

Inicialmente, observamos que o polinômio  $p(x)$  possui três zeros simples, que são

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3 \quad \text{e} \quad x_3 = 5.$$

Em seguida, vamos fazer uma análise do sinal do polinômio da seguinte forma:

- temos que  $p(x) < 0$  para  $x < x_1 = 0$
- temos que  $p(x) > 0$  para  $x_1 < x < x_2 = 3$
- temos que  $p(x) < 0$  para  $x_2 < x < x_3 = 5$
- temos que  $p(x) > 0$  para  $x > x_3 = 5$

Com as informações acima, podemos esboçar o gráfico de polinômio  $p(x)$ , cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

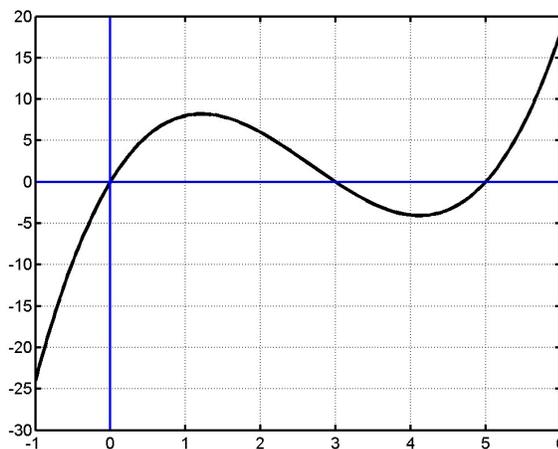
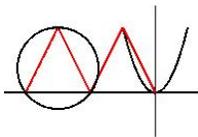


Figura 1: Gráfico do polinômio  $p(x)$  da Questão 3.



**Questão 4** Uma seqüência de Fibonacci é uma seqüência de números reais

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

na qual os dois primeiros termos,  $a_1$  e  $a_2$ , são escolhidos arbitrariamente e os termos seguintes são determinados como sendo a soma dos dois termos anteriores, isto é,

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

(a) Determine uma seqüência de Fibonacci que tenha o sexto termo,  $a_6$ , igual a 52.

(b) Determine uma seqüência de Fibonacci, distinta da escolhida no item anterior, que também tenha o sexto termo,  $a_6$ , igual a 52, mas cujo primeiro termo,  $a_1$ , seja um número negativo.

### Resolução

(a) Considerando a definição da seqüência de Fibonacci, temos

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + a_1 + a_2 = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$$

Como  $a_6 = 52$ , obtemos

$$3a_1 + 5a_2 = 52,$$

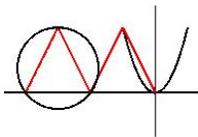
que é uma equação algébrica nas incógnitas  $a_1$  e  $a_2$ . Logo, possui infinitas soluções. Portanto, podemos construir infinitas seqüências de Fibonacci com  $a_6 = 52$ .

Fazendo, por exemplo, o primeiro termo  $a_1 = 4$  obtemos a equação  $52 = 12 + 5a_2$ . Assim, o segundo termo  $a_2 = 8$ . Então, uma seqüência de Fibonacci com  $a_6 = 52$  é

$$(4, 8, 12, 20, 32, 52, 84, \dots).$$

(b) De modo análogo, escolhendo o primeiro termo  $a_1 = -1$ , obtemos a seguinte seqüência de Fibonacci com  $a_6 = 52$ , e distinta da obtida no item (a),

$$(-1, 11, 10, 21, 31, 52, 83, \dots).$$



**Questão 5** Considere um tetraedro regular, e em cada uma das quatro faces o seu centro. Ligando cada um desses centros aos outros centros restantes, obtemos um novo poliedro contido no tetraedro original. Descreva esse poliedro, e faça um desenho do tetraedro inicial juntamente com o poliedro resultante.

### Resolução

O tetraedro regular possui 4 faces triangulares. Assim, o poliedro terá 4 vértices localizados nos centros de cada uma das faces do tetraedro. Observe que os segmentos tendo por extremidades vértices em faces adjacentes do tetraedro possuem medidas iguais, e estes segmentos formarão as arestas do novo poliedro. Teremos 6 arestas, 4 vértices e 4 faces triangulares (triângulos equiláteros). Portanto, O poliedro resultante é um **tetraedro regular**.

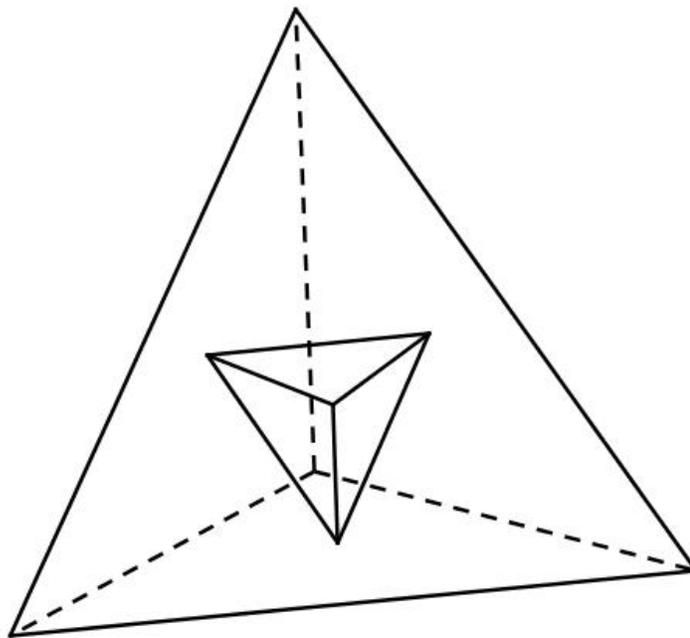
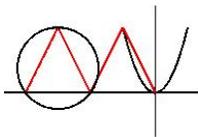


Figura 2: Representação gráfica do poliedro resultante da Questão 5.



**Questão 6** Represente graficamente e determine a área da região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} 2x - y \leq 8 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

Utilize o sistema de coordenadas da Figura 3 para fazer a representação da região.

### Resolução

Primeiramente determinamos o gráfico da reta  $r$  dada pela equação

$$y = x,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$x - y \geq 0$$

é a que está abaixo da reta  $r$ , testando o ponto  $P = (4, 0)$ .

Depois, determinamos o gráfico da reta  $s$  dada pela equação

$$y = -x + 4,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$x + y \geq 4$$

é a que está acima da reta  $s$ , testando o ponto  $P = (0, 0)$ . Em seguida, encontramos o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$ , que é o ponto  $A = (2, 2)$ . É importante observar que as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, pela análise dos coeficientes angulares.

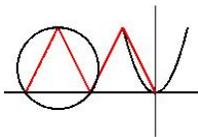
Em seguida, determinamos o gráfico da reta  $w$  dada pela equação

$$y = 2x - 8,$$

e verificamos que a região do plano numérico que satisfaz a desigualdade

$$2x - y \leq 8$$

é a que está acima da reta  $w$ , testando o ponto  $P = (0, 0)$ .



Em seguida, encontramos o ponto de intersecção das retas  $s$  e  $w$ , que é o ponto  $B = (4, 0)$ , e o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $w$ , que é o ponto  $C = (8, 8)$ .

Assim, obtemos a região procurada que é a região limitada pelo triângulo  $ABC$ .

Como as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, consideramos como base o lado  $AC$ , cujo comprimento é igual a  $6\sqrt{2}uc$ , e como altura o lado  $AB$ , cujo comprimento é igual a  $2\sqrt{2}uc$ , onde  $uc$  denota uma unidade de comprimento. Portanto, a área do triângulo  $ABC$  é igual a  $12ua$ , onde  $ua$  denota uma unidade de área.

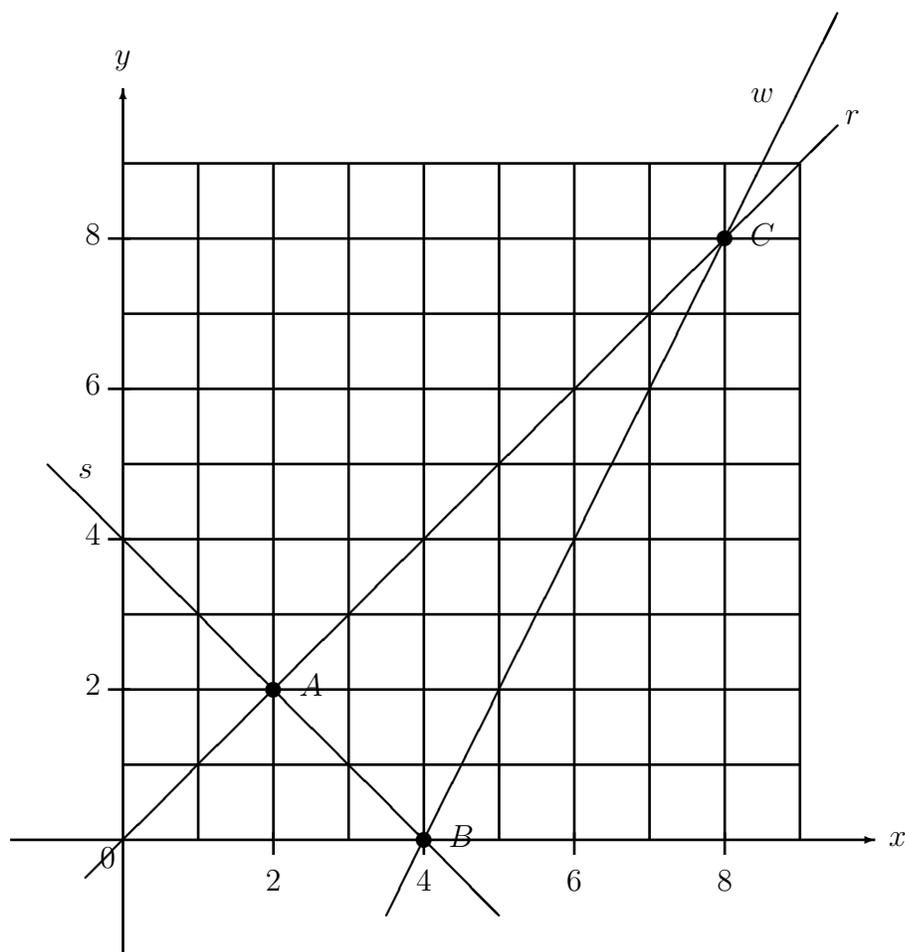


Figura 3: Representação gráfica da região da Questão 6.